Г.Голдстейн

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Углублённый курс классической механики долгое время считался обязательной частью учебных планов по физике. Однако в настоящее время целесообразность такого курса может показаться сомнительной, так как студентам старших курсов или аспирантам он не даёт новых физических понятий, не вводит их непосредственно в современные физические исследования и не оказывает им заметной помощи при решении тех практических задач механики, с которыми им приходится встречаться в лабораторной практике. Но, несмотря на это, классическая механика всё же остаётся неотъемлемой частью физического образования. При подготовке студентов, изучающих современную физику, она играет двоякую роль. Во-первых, в углублённом изложении она может быть использована при переходе к различным областям современной физики. Примером могут служить переменные действие — угол, нужные при построении старой квантовой механики, а также уравнение Гамильтона — Якоби и принцип наименьшего действия, обеспечивающие переход к волновой механике, или скобки Пуассона и канонические преобразования, которые весьма ценны при переходе к новейшей квантовой механике. Во-вторых, классическая механика позволяет студенту, не выходя за пределы понятий классической физики, изучить многие математические методы, необходимые в квантовой механике.

Обычное изложение, установившееся в основном около пятидесяти лет назад, конечно, не отвечает указанным целям. Поэтому автор сделал попытку привести классическую механику в соответствие с последними требованиями. В книге подчёркиваются формулировки, которые важны для современной физики, и всюду, где это возможно, используются математические методы, применяемые обычно в квантовой механике и обеспечивающие компактность и изящество изложения. Например, в связи с движением под действием центральных сил рассматривается задача о рассеянии элементарных частиц и даётся классическое решение этой задачи. Большое место в книге отведено каноническим преобразованиям, скобкам Пуассона, теории Гамильтона — Якоби и переменным действие — угол. Дано также введение в теорию вариационных принципов для непрерывных систем и полей.

Для иллюстрации применения новых математических методов в книге широко применяется теория матриц, в частности, к исследованию вращения твёрдого тела. При таком изложении известная теорема Эйлера о повороте твёрдого тела превращается в теорему о собственных значениях ортогональной матрицы. При матричном изложении такие различные темы, как тензор инерции, преобразование Лоренца в пространстве Минковского и собственные частоты малых колебаний оказываются в математическом отношении тождественными. Кроме того, матричные методы позволяют уже в начале курса познакомиться с такими сложными понятиями, как понятия отражения и псевдотензора, которые так важны в современной квантовой механике. Наконец, в связи с изучением параметров Кэйли — Клейна матричные методы позволяют ввести понятие «спинора».

Кроме того, мы сознательно допустили и некоторые другие отступления от обычного построения курса. Например, специальная теория относительности часто излагается недостаточно последовательно, если не считать весьма специального курса, охватывающего также и общую теорию относительности. Однако важность этой теории в современной физике требует знакомства с ней уже в ранней стадии обучения. Поэтому мы посвятили специально этому предмету шестую главу. Другим нововведением является рассмотрение сил, зависящих от скорости. В прошлом классическая механика строилась в основном на «статических» силах, т. е. силах, зависящих только от положения, таких, например, как гравитационные силы. Однако в современной физике нам постоянно приходится встречаться с силами, зависящими от скорости, например, с электромагнитными силами. Для того чтобы возможно раньше научить студента обращению с этими силами, мы с самого начала ввели потенциалы, зависящие от скорости, и затем постоянно пользовались ими.

Следующим новшеством этой книги является включение в неё механики непрерывных систем и полей (гл. 11). Вообще говоря, эти вопросы охватывают теорию упругости, гидродинамику и акустику, однако в таком объёме они выходят за рамки настоящей книги и, кроме того, по ним имеется соответствующая литература. В противоположность этому не существует хорошей литературы по применению классических вариационных принципов к непрерывным системам, хотя роль этих принципов в теории полей элементарных частиц всё время возрастает. Вообще теорию поля можно развить достаточно глубоко и широко ещё до рассмотрения квантования. Например, вполне возможно рассматривать тензор напряжение — энергия, микроскопические уравнения неразрывности, пространство обобщённых импульсов и т. д., целиком оставаясь при этом в рамках классической физики. Однако строгое рассмотрение этих вопросов предъявило бы чрезмерно высокие требования к студентам. Поэтому было решено (по крайней мере в этом издании) ограничиться лишь элементарным изложением методов Лагранжа и Гамильтона в применении к полям.

Стремясь к тому, чтобы этой книгой могли пользоваться лица с различной подготовкой, автор включил в главы 1 и 3 многое из того, что обычно содержится в общих курсах механики.

Математическая подготовка, необходимая для чтения этой книги, как правило, не выходит за пределы обычных курсов высшей математики и векторного анализа. Поэтому в книге отводится значительное место изложению более сложных математических методов, необходимых при изучении некоторых вопросов.

В тех случаях, когда речь шла об электромагнитных силах, мы предполагали элементарное знакомство читателя с уравнениями Максвелла и простейшими следствиями из них. Кроме того, мы предполагали некоторое знакомство с современной физикой, учитывая, что большинство студентов старших курсов или аспирантов изучали её, по крайней мере, в течение одного семестра. Поэтому автор часто коротко останавливался на связи между классическим развитием механики и его квантовым продолжением.

В литературе по механике встречается много элементарных задач, и поэтому мы считали нецелесообразным помещать их в большом количестве. По этой причине задачи, помещённые нами в конце каждой главы, служат большей частью продолжением текста и относятся к некоторым частным вопросам или различным вариантам доказательств теорем. Традиционных педантичных задач мы старательно избегали.

Выбор подходящих обозначений всегда связан с известными трудностями, так как нелегко найти обозначения, имеющие единственный смысл и не являющиеся громоздкими. В этой книге мы следовали установившейся практике, обозначая векторы полужирным латинским шрифтом, а все матрицы и тензоры — полужирным рубленым шрифтом. Список наиболее важных обозначений, встречающихся в этой книге, приводится в её конце. Второстепенные обозначения, встречающиеся лишь один раз, в этот список не включены.

Для более глубокого изучения изложенного материала и ознакомления читателей с незатронутыми вопросами в конце каждой главы приводится список рекомендуемой литературы. Этот список сопровождается краткими аннотациями, которые даются для ориентации студентов в существующей литературе по механике. Конечно, эти аннотации выражают только личное мнение автора. В конце всей книги имеется также общий библиографический список, содержащий много книг, не указанных ранее; он, однако, не содержит устаревших книг. Литературой, указанной в этом списке, автор пользовался при написании данной книги и поэтому считает своим долгом выразить признательность авторам перечисленных работ.

Настоящая книга написана по материалам лекций по классической механике, прочитанных автором в Гарвардском университете. Автор выражает благодарность заведующему кафедрой физики профессору ван Флеку за его личную и официальную поддержку, а также профессору Швингеру и другим своим коллегам за ряд ценных советов. Кроме того, автор глубоко признателен слушавшим его лекции студентам, активный интерес и доброжелательное отношение которых служили постоянным стимулом в работе автора над этой книгой.

Герберт Голдстейн

Кембридж
Март 1950

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРИНЦИПОВ

Законы движения материальных тел являлись предметом ранних исследований физиков, усилиями которых была создана обширная область, известная в своё время под названием аналитической механики или динамики, или просто механики. В настоящее время для обозначения этой области физики пользуются термином «классическая механика», противопоставляя ей более новые физические теории, в особенности квантовую механику. Таким образом, под термином «классическая механика» мы будем понимать механику, сложившуюся до создания специальной теории относительности. Целью настоящей книги является изложение методов классической механики и некоторых из её приложений, представляющих в настоящее время интерес для физики.

Механика строится на ряде основных физических представлений, таких, как время, пространство, одновременность, масса, сила. При изложении специальной теории относительности мы коротко остановимся на таких понятиях, как одновременность событий и масштаб времени и длины. Однако большей частью мы не будем подвергать эти понятия критическому анализу, а будем считать их первоначальными, смысл которых читателю ясен.

§ 1.1. Механика материальной точки. Физическое содержание механики материальной точки составляет *второй закон Ньютона*, который можно рассматривать или как основной постулат, или как определение силы и массы. Этот закон можно записать в виде

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{F}$ — суммарная сила, действующая на материальную точку, а $\boldsymbol{p}$ — *количество движения* этой точки, под которым понимается следующее. Пусть s обозначает длину пути, проходимого точкой в своём движении, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, проведённый в эту точку из начала координат. Вектор скорости можно тогда формально определить посредством равенства

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \tag{1.2}$$

где

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{s}}{dt}$$

(рис. 1). Из этого равенства видно, что вектор $\boldsymbol{v}$ направлен по касательной к траектории точки. Тогда количество движения $\boldsymbol{p}$ определяется посредством равенства

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{1.3}$$

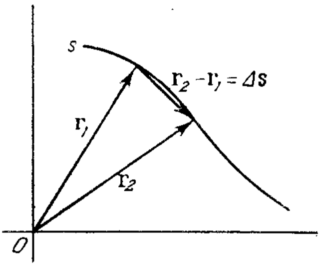

Рис. 1. Траектория точки и производная радиуса-вектора.

Таким образом, уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}). \tag{1.4}$$

В большей части случаев масса материальной точки является постоянной, и поэтому уравнение (1.1) принимает вид

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}, \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки, равное по определению

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{1.6}$$

Много важных положений механики можно высказать в форме теорем о сохранении тех или иных величин. Эти теоремы указывают, при каких условиях некоторые переменные механические величины остаются неизменными во времени. Из уравнения (1.1) непосредственно вытекает первая из этих теорем.

Теорема о сохранении количества движения материальной точки. *Если сила $\boldsymbol{F}$ равна нулю, то $\dot{\boldsymbol{p}} = 0$, т. е. количество движения материальной точки $\boldsymbol{p}$ сохраняется неизменным.*

Под моментом количества движения (или кинетическим моментом) материальной точки относительно центра O мы будем понимать вектор

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \tag{1.7}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, направленный к материальной точке из центра O. Заметим, что в этом произведении существенен порядок сомножителей.

Моментом силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O (или вращающим моментом этой силы) мы будем называть вектор

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{1.8}$$

Для $\boldsymbol{N}$ можно получить уравнение, аналогичное уравнению (1.1). Умножив уравнение (1.5) векторно на $\boldsymbol{r}$, получим

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}). \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) можно представить в другой форме, если воспользоваться векторным тождеством

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}),$$

в котором член $\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}$, очевидно, равен нулю. С помощью этого тождества уравнение (1.9) можно представить в виде

$$\boldsymbol{N}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}. \tag{1.10}$$

Заметим, что как $\boldsymbol{N}$, так и $\boldsymbol{L}$ зависят от выбора центра O, относительно которого берутся моменты.

Как и в случае уравнения (1.1), из уравнения (1.10) непосредственно вытекает теорема о сохранении.

Теорема о сохранении кинетического момента материальной точки. *Если результирующий вращающий момент* $\boldsymbol{N}$ *равен нулю, то* $\dot{\boldsymbol{L}}=0$ *и, следовательно, кинетический момент сохраняется неизменным.*

Рассмотрим теперь работу, совершаемую силой $\boldsymbol{F}$, действующей на материальную точку. Согласно определению работа силы при перемещении точки из положения 1 в положение 2 равна

$$W_{12}=\int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{1.11}$$

Для точки постоянной массы (во всех случаях, кроме особо оговоренных, мы будем считать массу постоянной) получаем

$$\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=m\int\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}\,dt=\frac{m}{2}\int\frac{d}{dt}(v^2)\,dt,$$

и следовательно,

$$W_{12}=\frac{m}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right). \tag{1.12}$$

Скалярная величина $mv^2/2$ называется кинетической энергией материальной точки и обозначается через T. Таким образом, работа W_{12} равна изменению кинетической энергии:

$$W_{12}=T_2-T_1. \tag{1.13}$$

Если силовое поле таково, что работа, совершаемая силой на любом замкнутом контуре, равна нулю, то будем иметь

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=0. \tag{1.14}$$

Такая сила (система) называется *консервативной*. С физической точки зрения ясно, что при наличии трения или других диссипативных сил система не может быть консервативной, так как соответствующий этой силе член $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ будет всё время отрицательным, и поэтому интеграл (1.14) не может обратиться в нуль. Согласно теореме Стокса условие консервативности сил [условие (1.14)] можно записать в виде

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0,$$

и так как ротация градиента всегда равна нулю, то вектор $\boldsymbol{F}$ должен быть градиентом некоторого скаляра, т. е. должно иметь место равенство

$$\boldsymbol{F}=-\nabla V. \tag{1.15}$$

Величина V называется *потенциалом* или *потенциальной энергией*. Существование функции $V(x, y, z)$ может быть доказано без привлечения теорем векторного анализа. В самом деле, если равенство (1.14) выполняется, то работа W_{12} не зависит от пути, по которому совершается интегрирование между точками *1* и *2*. Но отсюда следует, что W_{12} можно представить в виде разности $f(x_2, y_2, z_2)-f(x_1, y_1, z_1)$, где f — некоторая величина, зависящая только от положения точки. Эту величину можно обозначить через $-V$, и тогда для любого элемента длины ds будем иметь

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=-V,$$

или

$$F_s=-\frac{\partial V}{\partial s},$$

что эквивалентно равенству (1.15).

Заметим, что в равенстве (1.15) мы можем прибавить к V любую постоянную (в пространстве) величину, не нарушая при этом справедливости рассматриваемого равенства. Следовательно, *нулевой уровень для функции V может быть выбран произвольно.*

Для консервативной системы работа W_{12} равна

$$W_{12}=V_1-V_2. \tag{1.16}$$

Подставляя теперь равенство (1.16) в (1.13), получаем соотношение

$$T_1+V_1=T_2+V_2, \tag{1.17}$$

выражающее следующую теорему.

Теорема о сохранении энергии материальной точки. *Если силы, действующие на материальную точку, являются консервативными, то её полная энергия $T+V$ остается неизменной.*

§ 1.2. Механика системы материальных точек. Результаты, полученные в предыдущем параграфе, можно обобщить на систему из многих материальных точек, но при этом нужно различать *внешние силы* и *внутренние силы*. Под внешними мы будем понимать такие силы, которые действуют на материальные точки рассматриваемой системы извне, а под внутренними — такие силы, с которыми каждая материальная точка этой системы действует на все остальные точки той же системы. Тогда уравнение движения i-й материальной точки (второй закон Ньютона) примет вид:

$$\sum_j \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \dot{\boldsymbol{p}}_i, \tag{1.18}$$

где через $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$ обозначена внешняя сила, действующая на i-ю точку системы, а через $\boldsymbol{F}_{ji}$ — сила, с которой j-я точка действует на i-ю (сила $\boldsymbol{F}_{ii}$, конечно, равна нулю). Мы будем предполагать, что силы $\boldsymbol{F}_{ij}$ (так же, как и $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$) подчиняются третьему закону Ньютона, т. е. закону о равенстве действия и противодействия, согласно которому силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположны по направлению и *действуют вдоль прямой, их соединяющей*. Следует заметить, что в некоторых важных случаях этот закон несправедлив, например, для электромагнитных сил взаимодействия между движущимися частицами. Поэтому, применяя к таким системам теоремы, которые мы выведем ниже, следует проявлять осторожность.

Написав равенства (1.18) для всех точек и сложив их, получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \boldsymbol{F}_{ji}. \tag{1.19}$$

Первая сумма правой части этого равенства представляет собой суммарную силу $\boldsymbol{F}^{(e)}$, действующую на рассматриваемую систему, а вторая сумма обращается в нуль, так как согласно закону о равенстве действия и противодействия каждая сумма $\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{F}_{ji}$ равна нулю. Преобразуем теперь левую часть этого уравнения, вводя средний радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ рассматриваемой системы, полученный с учётом масс её точек (среднее взвешенное вектора $\boldsymbol{r}_i$):

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{M}. \tag{1.20}$$

Этот вектор определяет точку, называемую *центром масс системы* (рис. 2) *). Вводя вектор $\boldsymbol{R}$ в уравнение (1.19), получаем

$$M\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}=\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)}\equiv\boldsymbol{F}^{(e)}. \tag{1.21}$$

Отсюда видно, что центр масс движется так, как будто в нём сосредоточена масса всей системы и к нему приложена суммарная внешняя сила $\boldsymbol{F}^{(e)}$, действующая на систему. Следовательно, внутренние силы никакого влияния на движение центра масс не оказывают. Примером, который в связи с этим часто приводится, может служить движение снаряда, разорвавшегося в воздухе: центр масс его осколков движется так, как будто снаряд продолжает двигаться неразорвавшимся (если пренебречь сопротивлением воздуха). Этот же закон лежит в основе реактивного движения: для того чтобы движение центра масс оставалось неизменным, истечение газов (происходящее с большой скоростью) должно сопровождаться движением ракеты в сторону, противоположную истечению, т. е. вперёд.

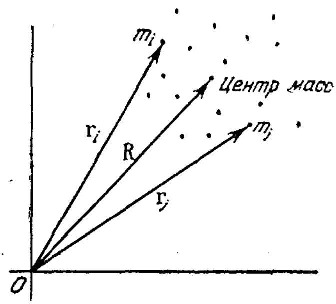

Рис. 2. Центр масс системы материальных точек.

Согласно формуле (1.20) полное количество движения системы

$$\boldsymbol{P}=\sum m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$$

равно массе всей системы, умноженной на скорость её центра масс. Поэтому из уравнения движения центра масс [уравнение (1.21)] мы получаем следующую теорему.

Теорема о сохранении количества движения материальной системы. *Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то полное количество движения системы остается неизменным.*

Под полным кинетическим моментом системы мы будем понимать сумму $\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$. Умножив уравнение (1.18) на $\boldsymbol{r}_i$ и произведя

---

*) Это определение будет более обычным, если равенство (1.20) записать в декартовых координатах:

$$X=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\quad Y=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\quad Z=\frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

где X, Y, Z — координаты центра масс.

затем суммирование по всем значениям i, получим

$$\sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i) = \sum_i \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) = \dot{\boldsymbol{L}} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji}. \qquad (1.22)$$

Согласно закону о равенстве действия и противодействия последний член этого равенства можно рассматривать как сумму членов вида

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ij} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ji}. \qquad (1.23)$$

Но разность $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ есть вектор $\boldsymbol{r}_{ij}$, идущий от точки j к точке i, и согласно закону о равенстве действия и противодействия

$$\boldsymbol{r}_{ij} \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0,$$

так как вектор $\boldsymbol{F}_{ji}$ направлен вдоль линии, соединяющей j-ю точку с i-й. Следовательно, сумма $\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji}$ равна нулю, и уравнение (1.22) можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}^{(e)}. \qquad (1.24)$$

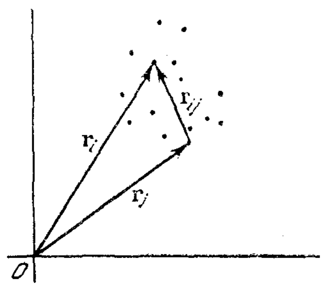

Рис. 3. Вектор $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$.

Таким образом, производная по времени от кинетического момента равна полному моменту внешних сил относительно данной точки. В соответствии с уравнением (1.24) имеем следующую теорему.

Теорема о сохранении кинетического момента системы. *Если полный момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то вектор* $\boldsymbol{L}$ *остаётся неизменным во времени.* (Следует подчеркнуть, что эта теорема является векторной теоремой, и поэтому, если, например, $N_z^{(e)}$ равно нулю, то L_z будет неизменным при любых $N_x^{(e)}$ и $N_y^{(e)}$, даже отличных от нуля.)

Заметим, что теорема о сохранении кинетического момента системы справедлива лишь при выполнении закона о равенстве действия и противодействия. В системах с движущимися заряженными частицами этот закон не выполняется, и полный кинетический момент в механическом смысле этого слова не остаётся там постоянным, но остаётся постоянной сумма механического кинетического момента и электромагнитного «кинетического момента».

Из равенств (1.20) и (1.21) следует, что количество движения системы можно рассматривать как количество движения её центра масс, если считать, что в нём сосредоточена вся масса системы. Для кинетического момента аналогичная теорема формулируется более сложно. Кинетический момент системы относительно начала координат O равен

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i.$$

Пусть $\boldsymbol{R}$ будет радиус-вектор, идущий из точки O в центр масс системы, а $\boldsymbol{r}'_i$ — радиус-вектор, идущий из центра масс в i-ю точку.

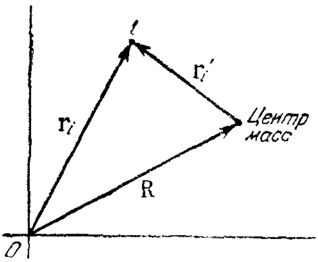

Рис. 4. Векторы $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}'_i$.

Тогда будем иметь (рис. 4)

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}, \tag{1.25}$$

и

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v},$$

где вектор

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$$

есть скорость центра масс, а вектор

$$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

— скорость i-й материальной точки относительно центра масс системы *). С помощью уравнения (1.25) кинетический момент можно представить в виде

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{R} \times m_i \boldsymbol{v} + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i\right) \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i.$$

Два последних члена в этом выражении обращаются в нуль, так как они содержат сумму $\sum m_i \boldsymbol{r}'_i$, которая определяет радиус-вектор центра масс в системе координат, начало которой совпадает с этим центром. Переписывая остальные члены, получаем полный кинетический момент системы в виде

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{v} + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i. \tag{1.26}$$

Равенство (1.26) показывает, что кинетический момент системы относительно точки O складывается из двух частей: из кинетического момента этой системы в предположении, что вся её масса сосредоточена в центре масс, и из кинетического момента, возникающего вследствие движения этой системы относительно центра масс. Из равенства (1.26) ясно видно, что в общем случае вектор $\boldsymbol{L}$ зависит от выбора точки O, так как правая часть равенства (1.26) выражается через $\boldsymbol{R}$. Только в случае, когда центр масс неподвижен относительно точки O, кинетический момент $\boldsymbol{L}$ не зависит от выбора этой точки. В этом случае первый член в равенстве (1.26) обращается в нуль, и вектор $\boldsymbol{L}$ сводится к кинетическому моменту системы относительно её центра масс.

*) Автор здесь (и в ряде подобных случаев) имеет в виду скорость точки относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс. (*Прим. перев.*)

Рассмотрим теперь уравнение энергии. Как и в случае одной материальной точки, вычислим работу, совершаемую всеми силами, действующими на рассматриваемую систему. Обозначив начальное положение этой системы индексом 1, а конечное — индексом 2, получим

$$W_{12}=\sum_i \int_1^2 \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{s}_i=\sum_i \int_1^2 \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{s}_i+\sum_{i \neq j} \int_1^2 \boldsymbol{F}_{ji} \cdot d\boldsymbol{s}_i \qquad (1.27)$$

и, воспользовавшись уравнениями движения, будем, как и ранее, иметь

$$\sum_i \int_1^2 \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{s}=\sum_i \int_1^2 m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\, dt=\sum \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right).$$

Следовательно, совершённая работа равна разности между конечной и начальной кинетической энергией, что можно записать в виде равенства

$$W_{12}=T_2-T_1,$$

где T — полная кинетическая энергия системы, равная

$$T=\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \qquad (1.28)$$

Вводя в формулу (1.28) координаты центра масс системы, мы согласно формуле (1.25) получаем

$$T=\frac{1}{2} \sum m_i (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i') \cdot (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i')=$$

$$=\frac{1}{2} \sum_i m_i v^2+\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2+\boldsymbol{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'\right)$$

и, рассуждая так же, как при вычислении кинетического момента, приходим к выводу, что последний член этой суммы равен нулю. Следовательно,

$$T=\frac{1}{2} M v^2+\frac{1}{2} \sum_i m_i v'^2. \qquad (1.29)$$

Таким образом, кинетическая энергия системы, подобно кинетическому моменту, складывается из двух частей: из кинетической энергии $\frac{Mv^2}{2}$, получающейся в предположении, что вся масса системы сосредоточена в её центре масс, и из кинетической энергии системы в её движении относительно центра масс.

Рассмотрим теперь правую часть равенства (1.27). В случае, когда внешние силы имеют потенциал, первый член правой части (1.27) можно записать в виде

$$\sum_i \int_1^2 \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{s}_i = -\sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\boldsymbol{s}_i = -\sum_i V_i \Big|_1^2,$$

где индекс i у оператора ∇ означает производную по r_i. Если внутренние силы также консервативны, то силы $\boldsymbol{F}_{ij}$ и $\boldsymbol{F}_{ji}$, являющиеся силами взаимодействия между i-й и j-й частицами, могут быть получены с помощью некоторой потенциальной функции V_{ij}. Чтобы удовлетворить закону действия и противодействия, потенциал V_{ij} должен быть функцией расстояния между этими частицами, т. е. должно иметь место равенство

$$V_{ij} = V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|). \tag{1.30}$$

Тогда силы $\boldsymbol{F}_{ij}$ и $\boldsymbol{F}_{ji}$ будут равны и противоположно направлены, так как

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ij}. \tag{1.31}$$

Кроме того, они будут направлены вдоль прямой, соединяющей рассматриваемые частицы, и можно будет написать

$$\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) f, \tag{1.32}$$

где f — некоторая скалярная функция.

Если бы V_{ij} была функцией разности других векторов, связанных с материальными точками, например разности их скоростей или (беря пример из современной физики) внутренних кинетических моментов — «спинов», — то силы были бы равными и противоположными, но не лежали бы на прямой, соединяющей две данные частицы.

В случае, когда все силы, $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$ и $\boldsymbol{F}_{ij}$, являются консервативными, второе слагаемое в правой части равенства (1.27) может быть записано в виде суммы членов вида

$$-\int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\boldsymbol{s}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\boldsymbol{s}_j).$$

Если разность векторов $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ обозначить через $\boldsymbol{r}_{ij}$, а для градиента по $\boldsymbol{r}_{ij}$ ввести оператор ∇_{ij}, то будем иметь:

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij}$$

и

$$d\boldsymbol{s}_i - d\boldsymbol{s}_j = d\boldsymbol{r}_i - d\boldsymbol{r}_j = d\boldsymbol{r}_{ij},$$

и член с индексом ij примет вид

$$-\int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\boldsymbol{r}_{ij}.$$

Тогда полная работа внутренних сил будет равна

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\int_1^2 \nabla_{ij}V_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_{ij}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}V_{ij}\Big|_1^2. \tag{1.33}$$

(Коэффициент $^1/_2$ появляется здесь вследствие того, что при суммировании по i и по j каждый индекс данной пары встречается дважды: при суммировании по i и при суммировании по j.)

Из изложенного ясно, что если внутренние и внешние силы имеют потенциал, то можно говорить о *полной потенциальной энергии системы*, понимая под ней сумму

$$V=\sum_i V_i+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}V_{ij}. \tag{1.34}$$

При этом полная энергия $T+V$ будет оставаться неизменной. Эта теорема является аналогом теоремы (1.17) для одной материальной точки.

Второй член правой части (1.34) называют внутренней потенциальной энергией системы. Она, вообще говоря, отлична от нуля и, что весьма важно, может изменяться вместе с изменением самой системы с течением времени. Только для частного класса систем — для *твёрдых тел* — внутренний потенциал есть величина постоянная. Формально, твёрдое тело можно определить как систему материальных точек, расстояния между которыми постоянны и не могут изменяться со временем. В этом случае величины r_{ij} постоянны, и поэтому векторы $d\boldsymbol{r}_{ij}$ перпендикулярны к соответствующим векторам $\boldsymbol{r}_{ij}$, а следовательно, и к силам $\boldsymbol{F}_{ij}$. По этой причине *в твёрдом теле внутренние силы не совершают работы*, и внутренний потенциал должен оставаться постоянным. Так как полный потенциал во всех случаях есть величина, определённая лишь с точностью до аддитивной постоянной, то постоянный внутренний потенциал можно при исследовании движения системы совершенно не рассматривать.

§ 1.3. Связи.

На основании сказанного до сих пор может сложиться впечатление, что все задачи механики сводятся к решению дифференциальных уравнений

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_j \boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{F}_i^{(e)},$$

т. е. к подстановке в эти уравнения известных сил, действующих на материальные частицы системы, и выполнению определённых математических операций, дающих решение задачи. Однако даже с чисто теоретической точки зрения такое представление является чрезмерно упрощённым. Дело в том, что может оказаться необходимым учесть *связи*, ограничивающие движение системы. Один вид такой системы нам уже встретился — это было твёрдое тело. Связи, накладываемые на его движение, состоят в том, что расстояния r_{ij} между его точками должны оставаться неизменными. Легко привести и другие примеры систем со связями: так, например, «косточка» на конторских счётах ограничена в своём движении проволокой, на которую она надета, и поэтому имеет одну степень свободы (если рассматривать только поступательное движение).

Связи можно классифицировать по различным признакам. Мы будем придерживаться следующей классификации. Если ограничения, накладываемые связями, могут быть выражены в виде равенств, связывающих координаты частиц (и время), т. е. выражены в виде равенств

$$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, t) = 0, \tag{1.35}$$

то мы будем называть эти связи *голономными*. Простейшим примером голономных связей могут служить связи в твёрдом теле, которые выражаются уравнениями вида

$$(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

Другим очевидным примером голономной связи может служить точка, имеющая возможность перемещаться лишь вдоль заданной кривой.

Связи, не выражаемые указанным образом, мы будем называть *неголономными*. Примером неголономной связи могут служить стенки сосуда с газом. Связь в примере с частицей, лежащей на поверхности шара, также является неголономной, так как она может быть выражена посредством неравенства

$$r^2 - a^2 \geqslant 0$$

(a — радиус сферы), которое отлично от соотношений вида (1.35). Если эта частица находится в поле силы тяжести, то, будучи положенной на вершину шара, она станет скользить по его поверхности лишь на части своего пути, а затем покинет её.

Кроме того, мы будем различать связи по тому, зависят они явным образом от времени или нет. В первом случае мы будем называть их *реономными*, а во втором — *склерономными*. Примером реономной связи может служить бусинка, скользящая по движущейся проволоке.

Связи вносят в решение механических задач две трудности. Первая из них состоит в том, что не все координаты $\boldsymbol{r}_i$ являются независимыми, так как они связаны определёнными соотношениями; следовательно, не все уравнения (1.18) будут независимыми. Вторая трудность заключается в том, что силы, развиваемые связями, например сила, с которой проволока действует на бусинку или стенки сосуда действуют на молекулу газа, априори не заданы. Они являются неизвестными величинами данной задачи и подлежат определению. В сущности, наложить на систему связи — это означает просто указать, что имеются силы, которые непосредственно не известны, но которые определенным образом влияют на движение системы.

В случае голономных связей трудность первого рода разрешается введением *обобщённых координат*. До сих пор мы встречались только с декартовыми координатами, и система, состоящая из N материальных точек, будучи свободной от связей, имела $3N$ независимых координат, или, другими словами, $3N$ *степеней свободы*. Если на эту систему наложены голономные связи, выражаемые k уравнениями вида (1.35), то мы можем с их помощью исключить k координат из общего числа $3N$ и получить, таким образом, лишь $3N-k$ независимых координат. В этом случае про систему говорят, что она имеет $3N-k$ степеней свободы. Исключение зависимых координат может быть произведено и другим путём. Он состоит в том, что вводят $3N-k$ независимых переменных $q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}$, которые позволяют выразить координаты $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ через эти переменные. В этом случае мы будем иметь соотношения вида:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{r}_N=\boldsymbol{r}_N(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t), \end{array}\right\} \tag{1.36}$$

выражающие $\boldsymbol{r}_l$ через q_l. Уравнения связей в них явно не содержатся. Уравнения (1.36) являются *уравнениями преобразования* переменных $\boldsymbol{r}_l$ к переменным q_l. Их можно также рассматривать как параметрическое представление переменных $(\boldsymbol{r}_l)$. В отличие от декартовых координат обобщённые координаты не разделяются на три группы, позволяющие образовать соответствующие векторы.

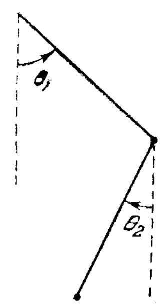

Рис. 5. Двойной маятник.

В случае, когда движение точки ограничено поверхностью сферы, обобщёнными координатами будут два угла, определяющих положение точки на сфере, например широта и долгота. В примере с плоским двойным маятником, изображенным на рис. 5, обобщёнными координатами будут углы θ_1 и θ_2. Обобщённые координаты (отличные от декартовых) часто оказываются полезными и в системах без связей. Так, например, в задаче о точке, движущейся в поле центральной силы $[V=V(r)]$, связи отсутствуют, но ясно, что здесь удобнее воспользоваться сферическими полярными координатами, нежели декартовыми.

На обобщённые координаты не следует смотреть как на ортогональные координаты, определяющие положение точек системы. В качестве обобщённых координат могут быть взяты любые величины, определяющие положение рассматриваемой системы. Так, например, в качестве таких координат можно взять амплитуды в разложении r_j в ряд Фурье. В ряде случаев может оказаться удобным использовать в качестве обобщённых координат величины, имеющие размерность энергии или кинетического момента.

Если связь неголономная, то выражающие её уравнения не могут быть использованы для исключения зависимых координат. Примером, который часто в этом случае приводится, может служить тело, катящееся по шероховатой поверхности. Координаты, определяющие положение этой системы, можно разбить на две группы: на группу угловых координат, определяющих ориентацию данного тела, и на группу координат, определяющих его положение на поверхности. Но если качение происходит без скольжения, то эти две группы координат оказываются зависимыми, так как изменение в ориентации тела неизбежно приводит к изменению его положения на поверхности. Однако уменьшить число координат этой системы мы не можем, так как условие «качения» не выражается в виде уравнения типа (1.35), связывающего координаты. Скорее оно является условием, ограничивающим *скорости* (скорость точки касания равна нулю). Таким образом, это условие является дифференциальным, и проинтегрировать его раньше, чем задача будет решена, невозможно.

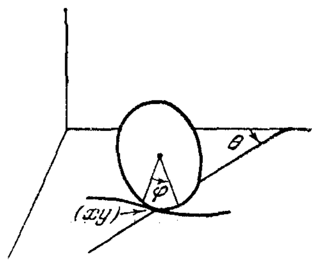

Рис. 6. Вертикальный диск, катящийся по горизонтальной плоскости.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий простой пример. Пусть диск катится без скольжения по горизонтальной плоскости xy, причём связь такова, что плоскость диска во всё время движения остаётся вертикальной. (Таким диском может быть одно из двух колёс, посаженных на общую горизонтальную ось.) Координатами, определяющими эту систему, могут служить координаты центра диска x, y, угол φ поворота диска вокруг своей оси и угол θ между осью диска и, скажем, осью x (рис. 6). В силу связи «качения» скорость центра диска будет пропорциональна производной $\dot{\varphi}$:

$$v = a\dot{\varphi},$$

где a — радиус диска. Направление этой скорости будет перпендикулярным к оси диска. Далее имеем:

$$\dot{x} = v \sin\theta,$$
$$\dot{y} = -v \cos\theta.$$

Отсюда, учитывая предыдущее равенство, получаем два *дифференциальных уравнения связи*:

$$\left.\begin{aligned} dx - a\sin\theta\, d\varphi = 0, \\ dy + a\cos\theta\, d\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.37)$$

Эти уравнения, очевидно, не могут быть проинтегрированы, пока вся задача не решена полностью. Такие *неинтегрируемые связи* являются частными случаями неголономных связей (как мы уже видели, ограничения, накладываемые неголономными связями, могут иметь вид неравенств).

Задача о движении системы с голономными связями формально всегда может быть решена, что частично объясняется возможностью исключения зависимых координат. Однако для задач с неголономными связями общего метода решения не существует. Правда, дифференциальные уравнения неголономных связей можно рассматривать совместно с дифференциальными уравнениями движения и тогда можно исключить зависимые величины с помощью метода множителей Лагранжа, который мы рассмотрим позже. Однако в более специальных случаях неголономных связей требуется индивидуальный подход к каждой задаче. При формальном изложении классической механики почти всегда предполагается, что любая имеющаяся связь является голономной. Это ограничение несколько сужает применимость общей теории, несмотря на то, что в повседневной практике нередко встречаются неголономные связи. Причина этого состоит в том, что связи, наложенные на систему, обычно реализуются посредством различных поверхностей, стенок или стержней и играют заметную роль лишь в макроскопических задачах. Но современных физиков интересуют главным образом микроскопические системы, в которых все объекты (как внутри системы, так и вне её) состоят из молекул, атомов и ещё более мелких частиц, порождающих определённые силы. Понятие связи становится в таких системах искусственным и встречается редко. Связи используются здесь лишь как математические идеализации, полезные при описании действительной физической картины, или же как классические приближения при изучении квантовомеханических процессов (например, «спин» и представление о вращении твёрдого тела). Такие связи всегда являются голономными и хорошо укладываются в рамки рассматриваемой теории.

Трудность второго рода, как уже указывалось, состоит в том, что реакции связи априори не известны. Чтобы преодолеть эту трудность, мы должны так поставить задачу, чтобы реакции связей в ней не фигурировали. Тогда нам придётся иметь дело лишь с силами, которые известны. Указание на то, как это сделать, можно получить, если обратиться к частной системе со связями, а именно к твёрдому телу. Реакциями связей здесь служат внутренние силы, и мы знаем, что работа этих сил равна нулю. Этот факт и послужит нам основой для обобщений, которые мы в дальнейшем сделаем.

§ 1.4. Принцип Даламбера и уравнения Лагранжа. Виртуальным (бесконечно малым) перемещением системы называется произвольное бесконечно малое изменение её конфигурации, *согласующееся со связями, наложенными на неё в данный момент* t. Виртуальным это перемещение называют для того, чтобы отличить его от действительного перемещения, происходящего за некоторый промежуток времени dt, в течение которого силы и связи могут измениться. Пусть система находится в равновесии, т. е. полная сила, действующая на каждую её точку, равна нулю. Тогда будем иметь $\boldsymbol{F}_i = 0$ и, следовательно, произведение $\boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$, равное работе силы $\boldsymbol{F}_i$ на виртуальном перемещении $\delta \boldsymbol{r}_i$, также будет равно нулю. Сумма таких произведений, взятая по всем точкам системы, также должна быть равна нулю:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0. \qquad (1.38)$$

В полученном равенстве ещё нет нового физического содержания. Чтобы получить его, разобьём $\boldsymbol{F}_i$ на активную силу $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ и реакцию связи $\boldsymbol{f}_i$:

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(a)} + \boldsymbol{f}_i, \qquad (1.39)$$

и уравнение (1.38) примет вид

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(a)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0. \qquad (1.40)$$

Мы будем рассматривать лишь такие системы, для которых виртуальная работа реакций связи равна нулю. Как мы знаем, это условие справедливо для любого твёрдого тела. Однако оно справедливо и для большого числа других систем. Пусть, например, на точку наложена связь, заставляющая её оставаться на заданной поверхности. Тогда реакция связи будет перпендикулярной к этой поверхности, а виртуальное перемещение точки будет касательным к ней, следовательно, виртуальная работа реакции будет равна нулю. Следует заметить, что это утверждение перестаёт быть справедливым при наличии силы трения, и такие системы мы должны исключить из нашего рассмотрения. Однако это ограничение не является очень сильным, так как трение представляет в сущности макроскопическое явление.

Таким образом, мы получаем следующее условие равновесия системы:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(a)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0. \qquad (1.41)$$

Согласно этому условию виртуальная работа *активных сил*, приложенных к уравновешенной системе, равна нулю. Принцип, выражаемый уравнением (1.41), часто называют *принципом виртуальных работ*. Заметим, что коэффициенты при δr_i в уравнении (1.41) уже не равны нулю, ибо в общем случае $F_i^{(a)} \neq 0$. Это связано с тем, что перемещения δr_i не являются независимыми, так как они подчинены соотношениям, накладываемым на них связями. Для того чтобы приравнять эти коэффициенты нулю, нужно так записать уравнение (1.41), чтобы в нём фигурировали не виртуальные перемещения δr_i, а виртуальные изменения независимых координат q_i.

Уравнение (1.41) удовлетворяет требованиям, которые мы поставили в начале этого параграфа: оно не содержит реакций f_i. Однако уравнение (1.41) относится лишь к случаю равновесия, а нам нужно получить принцип, справедливый для общего случая движения. Чтобы получить такой принцип, мы применим приём, предложенный Яковом Бернулли и развитый впоследствии Даламбером.

Уравнения движения

$$F_i = \dot{p}_i$$

можно записать в виде

$$F_i - \dot{p}_i = 0$$

и трактовать его как уравнение равновесия i-й точки системы под действием реальной силы F_i и «эффективной силы» $-\dot{p}_i$. Встав на такую точку зрения, мы можем свести динамику к статике. Тогда вместо (1.38) мы будем иметь

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 \tag{1.41'}$$

и, разбив силу F_i на активную силу $F_i^{(a)}$ и реакцию связи f_i, получим

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i + \sum_i f_i \cdot \delta r_i = 0.$$

Здесь мы опять ограничимся системами, для которых виртуальная работа сил f_i равна нулю. Окончательно будем иметь

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0. \tag{1.42}$$

Полученное равенство часто называют *принципом Даламбера* *). Таким образом, мы достигли нашей цели: реакции связи более не входят в наши уравнения, и индекс (a) теперь можно опустить, не боясь недоразумений. Однако мы ещё не получили уравнений движения в достаточно удобной форме. Для этого нам нужно привести уравнение (1.42) к такому виду, при котором оно будет

---

*) Обычно этот принцип называют принципом Даламбера — Лагранжа. (*Прим. перев.*)

содержать виртуальные вариации δq_i независимых обобщённых координат q_i (для голономных связей). Тогда каждый из коэффициентов при δq_i мы сможем приравнять нулю и получить таким путём уравнения движения.

Переход от r_i к q_i совершается по формуле

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

(n — число независимых координат). Для скорости $v_i \equiv \dot{r}_i$ при этом получается выражение

$$v_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}. \tag{1.43}$$

Точно так же произвольное виртуальное перемещение δr_i можно связать с вариациями δq_j соотношением

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{1.44}$$

Заметим, что в этом равенстве не содержится вариация времени δt, так как по определению виртуального перемещения оно обусловливается только изменениями координат q_i.

Виртуальная работа сил F_i выражается через координаты q_i следующим образом:

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,j} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j, \tag{1.45}$$

где Q — так называемые *обобщённые силы*, равные

$$Q_j = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}. \tag{1.46}$$

Заметим, что подобно тому, как обобщённые координаты q_j не обязательно должны иметь размерность длины, обобщённые силы Q_j не обязательно имеют размерность силы. Однако произведение $Q_j \delta q_j$ всегда имеет размерность работы.

Рассмотрим теперь другой член уравнения (1.42), равный

$$\sum_i \dot{p}_i \cdot \delta r_i = \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i.$$

Выражая δr_i согласно (1.44), его можно записать в виде

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\}. \tag{1.47}$$

В последнем члене этого равенства можно поменять порядок дифференцирования по t и по q_j, так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_k \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j\,\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j\,\partial t},$$

что согласно (1.43) равно $\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}$. Кроме того, из (1.43) видно, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}. \tag{1.48}$$

Совершая все описанные преобразования, мы для суммы (1.47) получаем:

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\sum_i\left\{\frac{d}{dt}\left(m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}\right\}.$$

Таким образом, интересующий нас член уравнения (1.42) принимает вид

$$\sum\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right\}\delta q_j.$$

Обозначая кинетическую энергию $\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2$ через T, мы можем окончательно записать принцип Даламбера в виде

$$\sum_j\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]-Q_j\right\}\delta q_j=0. \tag{1.49}$$

Пусть теперь рассматриваемые связи будут голономными (только в этом месте мы используем это предположение о голономности). Тогда координаты q_j будут независимыми, и любая вариация δq_j не будет зависеть от вариации δq_k. Поэтому равенство (1.49) будет иметь место тогда и только тогда, когда все коэффициенты при δq_j будут обращаться в нуль, т. е. когда будут выполняться равенства

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j. \tag{1.50}$$

Всего мы получим n таких уравнений.

Уравнения (1.50) обычно называют уравнениями Лагранжа, однако это название часто употребляют, имея в виду случай, когда уравнения (1.50) пишутся для консервативной системы. В этом случае силы $\boldsymbol{F}_i$ получаются из потенциальной функции V по формуле

$$\boldsymbol{F}_i=-\nabla_i V,$$

где V — потенциальная энергия системы. Обобщённые силы Q_j могут быть записаны в виде

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}.$$

Это выражение совпадает с выражением для частной производной функции $-V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ по q_j. (Заметим, что V может и не быть явной функцией от t.) Таким образом, можно написать

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad \left\{\begin{matrix}\text{консервативные}\\ \text{системы}\end{matrix}\right\}, \tag{1.51}$$

и уравнения (1.50) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Далее заметим, что потенциал V является функцией только положения системы и, следовательно, не зависит от обобщённых скоростей $\dot{q}_j$. Поэтому частную производную $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ можно заменить на $\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}$ и получить

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0,$$

или, вводя новую функцию — *лагранжиан*

$$L = T - V, \tag{1.52}$$

можно записать уравнения (1.50) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{1.53}$$

Во всех случаях, когда не будет сделано специальной оговорки, мы под уравнениями Лагранжа будем понимать уравнения (1.53).

§ 1.5. Потенциал, зависящий от скорости, и диссипативная функция. Уравнения Лагранжа можно представить в форме, подобной (1.53), и тогда, когда система не является консервативной в обычном смысле слова. Это удаётся сделать в том случае, когда обобщённые силы Q_j можно получить из функции $U(q_j, \dot{q}_j)$ посредством равенства

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right). \tag{1.54}$$

В этом случае уравнения (1.53) получаются из уравнений (1.50) при лагранжиане, равном

$$L = T - U. \tag{1.52'}$$

Величину U можно назвать «обобщённым потенциалом» или «потенциалом, зависящим от скорости» *). Возможность использования такого «потенциала» имеет не только академический интерес; такой потенциал можно применить к очень важному силовому полю — полю электромагнитных сил, действующих на движущийся электрический заряд. Учитывая важность этого случая, остановимся на нём несколько подробнее.

В единицах системы Гаусса уравнения Максвелла имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}&=0, &\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D}&=4\pi\rho,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}&=\frac{4\pi j}{c}, &\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

Известно, что сила, действующая на заряд q, не вполне определяется электрической силой

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}=-q\nabla\varphi,$$

и следовательно, этот заряд не является консервативной системой в обычном смысле. Полная сила, действующая на движущийся заряд, равна

$$\boldsymbol{F}=q\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right\}. \tag{1.56}$$

Вектор $\boldsymbol{E}$ не есть градиент скалярной функции, так как $\nabla\times\boldsymbol{E}\neq 0$; из равенства $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ следует, что вектор $\boldsymbol{B}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{1.57}$$

где $\boldsymbol{A}$ — так называемый векторный магнитный потенциал. Тогда первое из уравнений (1.55) примет вид

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0,$$

что позволяет написать

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi,$$

или

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{1.58}$$

*) История этого термина довольно курьёзна. По-видимому, он был сначала введён (и ошибочно) Вебером в классической электродинамике, где постулируются силы, зависящие от скорости. Немецкий математик Е. Шеринг был, видимо, первый, кто серьёзно пытался ввести такие силы в механику (см. Gött. Abh. 18, 3, 1873). Так, например, в первом издании Уиттекера, Аналитическая динамика, 1904, есть ссылка на потенциал в смысле «потенциальной функции Шеринга». Однако этот термин, по-видимому, не вошёл в употребление, так как в последующих изданиях он был исключён. Мы отдаём предпочтение термину «обобщённый потенциал», включая в это понятие также и обычную потенциальную энергию, являющуюся функцией только положения.

Отсюда следует, что так называемая сила Лоренца (1.56) выражается через потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{F}=q\left\{-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A})\right\}. \tag{1.59}$$

Члены равенства (1.59) можно записать в более удобной форме. Для того чтобы получить её, рассмотрим составляющие

$$(\nabla\varphi)_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

и

$$(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A})_x=v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=$$

$$=v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}+v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}-v_y\frac{\partial A_x}{\partial y}-v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}-v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}.$$

(В последнем выражении мы добавили и вычли член $v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}$.) Полная производная A_x по времени равна

$$\frac{dA_x}{dt}=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right).$$

Первый член здесь возникает вследствие непосредственного изменения A_x со временем, а второй — вследствие движения заряда, так как это приводит к изменению координат точки, к которой относится A_x. Учитывая предыдущие равенства, можно составляющую $(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A})_x$ записать в виде

$$(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-\frac{dA_x}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial t},$$

а составляющую F_x в равенстве (1.59) — в виде

$$F_x=q\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})\right]\right\}.$$

Так как скалярный потенциал φ не зависит от скорости, то это равенство можно написать в виде

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_x},$$

где

$$U=q\varphi-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{1.60}$$

Таким образом, величина U является обобщённым потенциалом в смысле (1.54), и, значит, лагранжиан заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, можно записать в виде

$$L=T-q\varphi+\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{1.61}$$

Следует заметить, что если из сил, действующих на систему, потенциалом обладают лишь некоторые, то уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j,$$

где L, как и ранее, получается из сил, обладающих потенциалом, а Q_j представляют собой обобщённые силы, *не имеющие* потенциала. Такое положение часто встречается тогда, когда в системе имеются силы трения.

В ряде случаев сила трения пропорциональна скорости движущейся точки, так что её составляющая по оси x выражается равенством

$$F_{fx}=-k_x v_x.$$

В этих случаях силы трения могут быть выражены через *диссипативную функцию Рэлея*, равную

$$\mathfrak{F}=\frac{1}{2}\sum_i\left(k_x v_{ix}^2+k_y v_{iy}^2+k_z v_{iz}^2\right),$$

где суммирование производится по всем точкам системы. Из этого выражения видно, что

$$F_{fx}=-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial v_x},$$

или символически:

$$F_f=-\nabla_v\mathfrak{F}.$$

Диссипативной функции можно дать физическую интерпретацию. Работа, расходуемая системой на трение, равна

$$dW_f=-\boldsymbol{F}_f\cdot d\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{F}_f\cdot\boldsymbol{v}\,dt=\left(k_x v_x^2+k_y v_y^2+k_z v_z^2\right)dt.$$

Следовательно, величина $2\mathfrak{F}$ выражает скорость рассеивания энергии вследствие трения. Обобщённые силы, обусловленные рассматриваемыми силами трения, равны

$$Q_j=\sum_i \boldsymbol{F}_{if}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=-\sum\nabla_v\mathfrak{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j},$$

что согласно (1.48) равно

$$-\sum\nabla_v\mathfrak{F}\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}=-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial \dot{q}_j}.$$

Уравнения Лагранжа принимают в этом случае вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial \dot{q}_j}=0,$$

и для того, чтобы получить уравнения движения, нужно задать две скалярные функции: L и $\mathfrak{F}$.

§ 1.6. Примеры получения уравнений Лагранжа. Из предыдущего видно, что если система такова, что для неё можно составить лагранжиан, т. е. если система является голономной и обладает обычным или обобщённым потенциалом, то имеется весьма удобный способ получения уравнений её движения. Составляя эти уравнения, мы преследовали цель исключить реакции связей, но при этом получили и другие полезные результаты. Для того чтобы получить уравнения движения в виде (1.18), нужно было иметь дело со многими векторами сил и ускорений. Применяя же метод Лагранжа, мы оперируем лишь с двумя *скалярными* функциями T и V, что сильно упрощает поставленную задачу. Теперь мы можем указать метод составления уравнений движения, общий для всех задач механики, к которым приложим метод Лагранжа. Согласно этому методу нужно лишь написать функции T и V в обобщённых координатах, образовать из них лагранжиан L и, подставив его в (1.53), получить уравнения движения. При этом переход от декартовых координат к обобщённым получается для функций T и V с помощью уравнений преобразования (1.36) и (1.43). Так, например, функция T в общем случае вычисляется по формуле

$$T=\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2} m_i\left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j+\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2 .$$

Ясно, что, раскрывая это равенство, мы получим выражение вида

$$T=a+\sum_j a_j \dot{q}_j+\sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \tag{1.62}$$

где a, a_j, a_{jk} — определённые функции r и t и, следовательно, определённые функции q и t. Действительно, сравнивая два последних равенства, получаем:

$$a=\sum_i \frac{1}{2} m_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2,$$

$$a_j=\sum_i m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

и

$$a_{jk}=\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k}.$$

Если уравнения преобразования не содержат явно времени, т. е. если связи не зависят от времени (склерономные связи), то два первых члена в равенстве (1.62) обращаются в нуль. В этом случае T будет однородной квадратичной функцией обобщённых скоростей.

Рассмотрим следующие простые примеры:

1. Движение свободной материальной точки

а) в декартовых координатах,

b) в плоских полярных координатах.

2. Машину Атвуда.

3. Шарик, скользящий вдоль вращающейся проволоки (пример связи, зависящей от времени).

1. *Движение свободной материальной точки.*

a) *В декартовых координатах.* В этом случае будем иметь:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

и уравнения движения примут вид:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z, \tag{1.63}$$

где F_x, F_y, F_z — обобщённые силы [уравнение (1.50)]. Таким образом, мы вновь пришли к уравнениям Ньютона.

b) *В плоских полярных координатах.* В этом случае нам нужно выразить T через $\dot{r}$ и $\dot{\theta}$. Уравнения перехода от x, y к r, θ, т. е. уравнения (1.36), имеют вид:

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

и поэтому скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$ равны:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta,$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

[согласно (1.43)]. Следовательно, кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ принимает вид

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2]. \tag{1.64}$$

Формулу (1.64) можно получить иначе, если учесть, что вектор скорости имеет в полярных координатах две составляющие: $\dot{r}$ — вдоль $\boldsymbol{r}$ и $r\dot{\theta}$ — перпендикулярную к $\boldsymbol{r}$ (вдоль направления, определяемого единичным вектором, который мы обозначим через $\boldsymbol{n}$). Поэтому величина v^2 будет в полярных координатах равна $\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$.

Обобщённые силы Q_r и Q_θ можно получить, исходя из их определения [формула (1.46)], согласно которому

$$Q_r = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} = F_r,$$

$$Q_\theta = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \boldsymbol{F}\cdot r\boldsymbol{n} = rF_\theta$$

(в соответствии с определением производной вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ направлен вдоль $\mathbf{n}$; рис. 7).

Так как в данном случае имеются две обобщённые координаты, мы можем получить два уравнения Лагранжа. Для координаты r будем иметь:

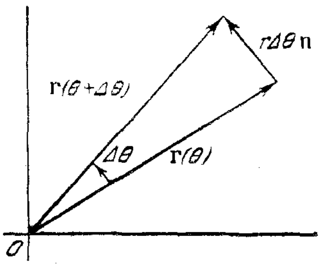

Рис. 7. Производная $\mathbf{r}$ по θ.

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r},$$

и соответствующее уравнение получает вид

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r.$$

Второе слагаемое этого уравнения появляется вследствие наличия центростремительного ускорения.

Для координаты θ будем иметь:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$

и соответствующее уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой производную по времени от кинетического момента, а правая — момент действующей силы. Таким образом, мы вновь получили уравнение (1.24).

2. *Машина Атвуда.* Эта машина может служить примером консервативной системы с голономной и склерономной связью (трением в блоке пренебрегаем). Здесь, очевидно, имеется лишь одна независимая координата x, так как положение второго груза определяется из того условия, что длина нити, связывающей грузы, равна l (рис. 8). Потенциальная энергия этой системы равна

$$V = -M_1 g x - M_2 g (l - x),$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2.$$

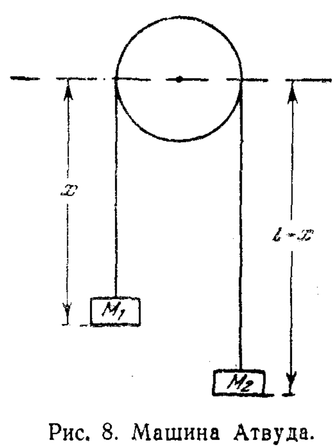

Рис. 8. Машина Атвуда.

Следовательно, её лагранжиан будет иметь вид

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g (l - x).$$

Далее находим

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)\,g,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\,\dot{x}$$

и получаем

$$(M_1 + M_2)\,\ddot{x} = (M_1 - M_2)\,g,$$

или

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\,g.$$

В данном случае мы имеем лишь одно уравнение движения.

Полученный результат совпадает, конечно, с тем, который получается более элементарным путём. На примере этой простой задачи мы показали, что реакции связи — в данном случае натяжение нити — не входят в уравнения Лагранжа. Поэтому определить натяжение нити, пользуясь непосредственно методом Лагранжа, конечно, нельзя.

3. *Шарик, скользящий по равномерно вращающейся проволоке в пространстве, свободном от сил.* Этот пример выбран нами в качестве иллюстрации системы со связями, зависящими от времени. Уравнения перехода к обобщённым координатам содержат в данном случае время явным образом и имеют вид:

$$x = r\cos\omega t,$$
$$y = r\sin\omega t,$$

где ω — угловая скорость вращения.

Хотя величину кинетической энергии T можно в данном случае найти так же, как это делалось при получении формулы (1.62), однако проще воспользоваться непосредственно формулой (1.64), учитывая условие связи $\dot{\theta} = \omega$. Тогда получим

$$T = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

(Заметим, что T в данном случае равно L.) Кинетическая энергия T не является здесь однородной квадратичной функцией обобщённых скоростей, так как здесь имеется дополнительный член, не содержащий $\dot{r}$. Уравнение движения будет иметь в данном случае вид

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0,$$

или

$$\ddot{r} = r\omega^2.$$

Это равенство выражает хорошо известный факт, согласно которому шарик движется от оси вращения под действием центробежной силы.

В данном случае мы, как и ранее, не можем найти рассматриваемым методом реакцию связи, удерживающей шарик на проволоке.

Задачи

1. Ядро, находящееся в покое, претерпевая радиоактивный распад, испускает электрон с количеством движения 1,73 Mev/c и под прямым углом к направлению электрона — нейтрино с количеством движения 1,00 Mev/c. (Mev $= 10^6$ электрон-вольт является единицей энергии, употребляемой в современной физике; она равна $1{,}59 \cdot 10^{-6}$ эргов. Соответственно Mev/c является единицей количества движения, равной $0{,}533 \cdot 10^{-16}$ *г · см/сек.*) В каком направлении будет двигаться само ядро? Чему будет равно его количество движения в Mev/c? Чему будет равна его кинетическая энергия в электронвольтах, если оставшаяся масса ядра равна $3{,}90 \cdot 10^{-22}$ *г*?

2. Материальной точке, находящейся на поверхности Земли, сообщена скорость, достаточная для преодоления силы земного притяжения. Показать, что минимальное значение этой скорости равно приблизительно 11 *км/сек.* (Если пренебречь сопротивлением атмосферы, то система будет консервативной. Использовать теорему о сохранении суммы потенциальной и кинетической энергии; влияние Луны не учитывать.)

3. Движение ракет происходит в соответствии с теоремой о количестве движения. Продукты сгорания топлива отбрасываются назад через её хвостовую часть, и так как топливо находится внутри самой ракеты, то масса её не остаётся постоянной, а убывает по мере сгорания топлива. Показать, что если пренебречь сопротивлением атмосферы, то для ракеты, летящей по вертикали в однородном гравитационном поле, уравнение движения будет иметь вид

$$m\frac{dv}{dt} = -v'\frac{dm}{dt} - mg,$$

где m — масса ракеты, а v' — скорость истечения газов относительно ракеты.

Проинтегрировать это уравнение и получить v как функцию m, считая массовый расход $\frac{dm}{dt}$ постоянным. Рассмотреть ракету, начинающую движение из состояния покоя со скоростью $v' = 2$ *км/сек* и $\left|\frac{dm}{dt}\right| = m_0/60$, где m_0 — начальная масса (данные близки к ракете Фау-2). Показать, что скорость, достаточную для преодоления земного тяготения, эта ракета сможет достигнуть тогда, когда отношение веса её топлива к весу самой ракеты (без топлива) будет равно приблизительно 300.

4. Точка движется в плоскости, притягиваясь к неподвижному центру силой

$$F = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}\dot{r}}{c^2}\right),$$

где r — расстояние от центра притяжения. Найти обобщённый потенциал этой силы, а также лагранжиан рассматриваемой системы. (Указанная сила F представляет силу взаимодействия двух заряженных частиц в электродинамике Вебера.)

5. Составить уравнение движения материальной точки, падающей вертикально вниз под действием двух сил: силы тяжести и силы трения, получаемой из диссипативной функции $\frac{1}{2}kv^2$. Проинтегрировать полученное уравнение и найти скорость как функцию времени. Показать, что максимальное значение скорости падения (при $v_0 = 0$) равно $v = mg/k$.

6. Две точки равной массы m соединены жёстким невесомым стержнем длиной l. Середина этого стержня имеет возможность двигаться по окруж-

ности радиуса a. Выразить кинетическую энергию этой системы в обобщённых координатах.

7. Составить уравнения Лагранжа для сферического маятника, т. е. для точки, связанной посредством жёсткого невесомого стержня с неподвижным центром.

8. Система состоит из трёх материальных точек равной массы m. Между каждыми двумя из них действует сила, обладающая потенциалом

$$V = -ge^{-\mu r},$$

где r — расстояние между взаимодействующими точками. Кроме того, две из этих точек взаимодействуют с третьей и каждая из сил этого взаимодействия получается из обобщённого потенциала

$$U = -f\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{v}$ — относительная скорость взаимодействующих точек, а f — некоторая константа. Написать лагранжиан этой системы, выбрав в качестве координат радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ центра масс и векторы

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3,$$
$$\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3.$$

Будет ли кинетический момент этой системы оставаться неизменным?

9. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 связаны нитью, проходящей через отверстие в гладком столе, причём m_1 находится на поверхности стола, а m_2 — ниже этой поверхности. Предполагая, что m_2 движется строго по вертикали, выберите обобщённые координаты этой системы и напишите уравнения Лагранжа для неё. Постарайтесь выяснить физический смысл каждого из этих уравнений. Сведя задачу к одному дифференциальному уравнению второго порядка, получите его первый интеграл. Каков его физический смысл? (Движение рассматривается лишь до тех пор, пока масса m_1 или m_2 не пройдёт через отверстие.)

10. Составьте лагранжиан и уравнения движения для двойного маятника, изображённого на фиг. 5. Длины стержней равны l_1 и l_2, а массы грузов соответственно m_1 и m_2.

Рекомендуемая литература*)

J. L. Synge и B. A. Griffith, Principles of Mechanics.

Отличный учебник механики средней трудности Он будет весьма полезен в качестве предварительного пособия до перехода к более серьёзным курсам, подобным данному.

C. J. Coe, Theoretical Mechanics.

Учебник средней трудности, написанный в векторной форме. В некоторых из последних глав затронуты более серьёзные вопросы. В книге содержатся основы векторного анализа.

W. F. Osgood, Mechanics.

Пять первых глав этой книги составляют элементарное введение в механику. Книга отлично написана и принадлежит автору, обладающему большим педагогическим опытом.

G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik.

В главах V и VI этой книги рассматриваются вопросы, близкие к изложенным в данной главе.

*) Для удобства читателей мы в конце каждой главы даём краткий список рекомендуемой литературы с небольшой аннотацией на каждую книгу. Более полный список литературы приведён в конце книги.

E. A. Milne, Vectorial Mechanics.

Хотя данная книга являет собой пример того, как можно изящную простоту векторного и тензорного методов представить в сложном и трудном для усвоения виде, тем не менее в третьей части этой книги читатель сможет найти много интересных векторных теорем о движении точки и системы, полученных из основных законов механики

E. Mach, The Science of Mechanics *).

В книге содержатся анализ и критика основных концепций классической механики. В своё время она сыграла большую роль в отношении философской стороны теории относительности **).

R. B. Lindsay и H. Margenau, Foundations of Physics.

В главе 3 этой книги даётся ясное изложение основ классической механики. Наряду с книгой Маха она может служить основой для дальнейшего знакомства с основными идеями механики **).

G. Hamel, Die axiome der Mechanik (Handbuch der Physik, т. V).

В книге делается попытка установить аксиомы механики на строго математической основе. В статье Нордхейма этого тома кратко рассмотрены потенциалы, зависящие от скорости (§ 10 гл. 2).

E. T. Whittaker, Analytical Dynamics ***).

Это—хорошо известная книга, дающая исчерпывающее изложение аналитической механики со старой точки зрения. В этой книге обнаруживается очевидная нелюбовь автора к чертежам (их всего четыре во всей книге), а также к векторному аппарату и, наоборот, чрезмерная любовь к тем задачам по механике, которые приобрели известность как экзаменационные задачи в Кембридже. Однако в отношении многих специальных вопросов эта книга является практически единственным имеющимся источником. Вопросы, связанные с темой настоящей главы, изложены в этой книге в основном в главе II, особенно в § 31, где рассматриваются потенциалы, зависящие от скорости. §§ 92—94 главы VIII посвящены диссипативной функции.

Lord Rayleigh, The Theory of Sound ****).

В главе IV 1-го тома этой классической книги рассматривается диссипативная функция.

---

*) Имеется русский перевод: Мах Э., Механика, СПБ, 1909.

**) Читателю следует иметь в виду, что в книге Э. Маха наряду с ценным фактическим материалом имеются неверные философские высказывания (*Прим. перев.*)

***) Имеется русский перевод: Уиттекер Э. Т., Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.

****) Имеется русский перевод: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Теория звука, Гостехиздат, 1955.

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

§ 2.1. Принцип Гамильтона. Выводя в предыдущей главе уравнения Лагранжа, мы рассматривали мгновенное состояние системы и небольшие виртуальные изменения этого состояния. Таким образом, мы исходили из «дифференциального принципа», каким является принцип Даламбера. Однако уравнения Лагранжа можно получить и из другого принципа, в котором рассматривается движение системы за конечный промежуток времени и небольшие виртуальные изменения движения в этом промежутке. Принципы такого рода известны как «интегральные принципы».

Прежде чем перейти к их изложению, уточним смысл фразы «движение системы за конечный промежуток времени». В каждый данный момент времени конфигурация системы определяется значениями обобщённых координат $q_1, \ldots, q_n$, и если рассматривать эти числа как декартовы координаты в n-мерном пространстве, то каждой конфигурации системы будет соответствовать определённая точка этого пространства. Такое n-мерное пространство мы будем называть *пространством конфигураций*. С течением времени состояние системы изменяется, и точка, изображающая эту систему, описывает в пространстве конфигураций некоторую кривую. Мы будем называть эту кривую «траекторией движения системы». Тогда движение системы можно будет рассматривать как движение *изображающей точки* вдоль этой траектории (в пространстве конфигураций). Время t можно при этом рассматривать как параметр. Тогда каждой точке траектории будет соответствовать одно или несколько значений t. Следует подчеркнуть, что пространство конфигураций, вообще говоря, не является трёхмерным пространством, в котором происходит движение системы (подобно тому, как обобщённые координаты не всегда являются обычными координатами, определяющими положение точки). Траектория движения в пространстве конфигураций, конечно, не будет иметь сходства с истинной траекторией какой-либо точки рассматриваемой системы; каждая точка траектории в пространстве конфигураций изображает *всю* эту систему в некоторый момент времени.

Теперь мы можем сформулировать *интегральный принцип Гамильтона* для консервативных систем (в более широком смысле, т. е. допускающих обобщённые потенциалы): *истинное движение системы в промежутке от* t_1 *до* t_2 *таково, что интеграл*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{2.1}$$

(где $L = T - V$*) имеет при этом экстремум.*

Таким образом, из всех возможных движений изображающей точки от её положения в момент t_1 до её положения в момент t_2 истинным будет то движение, при котором интеграл (2.1) имеет экстремум: максимум или минимум (рис. 9).

Таким образом, согласно принципу Гамильтона истинное движение таково, что *вариация* интеграла I при фиксированных значениях t_1 и t_2 равна нулю:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\,dt = 0. \tag{2.2}$$

Можно показать, что принцип Гамильтона вытекает из уравнений Лагранжа (см., например, Whittaker, *Analytical Dynamics*, 4-е изд., стр. 245). Мы сейчас докажем обратное, а именно, что уравнения Лагранжа следуют из принципа Гамильтона. Эта теорема является более важной. Таким образом, мы покажем, что механику консервативных систем можно построить, исходя из принципа Гамильтона как из основного постулата, заменяющего законы Ньютона. Формулировка законов механики в виде принципа Гамильтона имеет определённые преимущества: например, при этом мы получаем принцип, не зависящий от координат, применяемых при составлении лагранжиана. Более важно другое: что этот принцип указывает путь, которому нужно следовать при описании с математической строгостью классической механики явно немеханических систем (например, в теории поля).

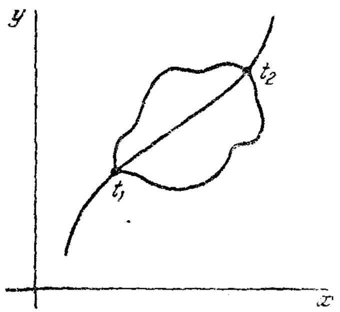

Рис. 9. Траектория изображающей точки в пространстве конфигураций.

§ 2.2. Некоторые приёмы вычисления вариаций.

Прежде чем показать, что уравнения Лагранжа вытекают из уравнения (2.2), мы сделаем некоторое отступление и остановимся на методах вычисления вариаций, так как главной нашей задачей является нахождение кривой, для которой заданный криволинейный интеграл принимает экстремальное значение.

Рассмотрим сначала эту задачу в одномерной форме. Для этого попытаемся найти такую кривую $y=y(x)$, которая на участке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ реализует экстремум криволинейного интеграла от заданной функции $f(y, \dot{y}, x)$, где $\dot{y}=\frac{dy}{dx}$. Другими словами, для искомой функции y интеграл

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx \tag{2.3}$$

должен иметь максимум или минимум. Переменная x играет здесь роль параметра t, и мы будем рассматривать лишь такие кривые $y(x)$, для которых $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$ (рис. 10; этот чертёж сделан, конечно, не в пространстве конфигураций).

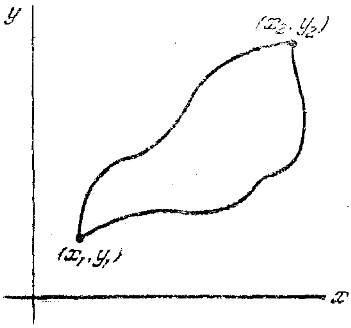

Рис. 10. Варьирование кривой $y=y(x)$.

Чтобы решить эту задачу, мы представим её в форме, позволяющей использовать обычный аппарат дифференциального исчисления. С этой целью рассмотрим какое-либо однопараметрическое семейство кривых $y(x)$. Каждой кривой этого семейства будет соответствовать определённое значение параметра α, причём некоторым значениям этого параметра, например значению $\alpha=0$, будут соответствовать кривые, реализующие экстремум рассматриваемого интеграла. Тогда y будет функцией x и α. Пусть, например, $y(x, \alpha)$ имеет вид

$$y(x, \alpha)=y(x, 0)+\alpha\eta(x), \tag{2.4}$$

где $\eta(x)$ — любая функция x, обращающаяся в нуль при $x=x_1$ и $x=x_2$. Тогда семейство (2.4) будет одним из возможных семейств кривых $y(x)$. Подставив функцию $y(x, \alpha)$ [не обязательно в виде (2.4)] в выражение (2.3), мы получим интеграл J как функцию α. Таким образом, будем иметь

$$J(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x]\, dx, \tag{2.5}$$

и условие экстремума примет вид

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}=0. \tag{2.6}$$

Производя дифференцирование под знаком интеграла, получаем

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right\}dx, \tag{2.7}$$

где второй из интегралов правой части равен

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \alpha}dx.$$

Вычисляя этот интеграл посредством интегрирования по частям, получаем

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \alpha}dx=\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}dx, \tag{2.8}$$

причём $\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{x=x_1}$ и $\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{x=x_2}$ будут равны нулю, так как все кривые семейства $y=y(x,\ \alpha)$ проходят через точки $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$. Следовательно, первое слагаемое правой части выражения (2.8) обращается в нуль, и уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}dx.$$

Чтобы найти кривую, реализующую экстремум интеграла (2.3), умножим полученное равенство на $d\alpha$ и положим $\alpha=0$:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha\,dx. \tag{2.9}$$

Вариации функций мы будем обозначать символом δ. Таким образом, будем иметь

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha=\delta J$$

и аналогично

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha=\delta y \tag{2.10}$$

и

$$\left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha=\delta \dot{y}$$

(последнее равенство нам не потребуется). Очевидно, δy представляет собой произвольную вариацию функции $y(x)$, получающуюся посредством варьирования произвольного параметра α около значения $\alpha=0$. Эта вариация соответствует рассмотренному ранее виртуальному перемещению *). Но поскольку δy является произвольной функцией x, то равенство

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right\}\delta y\,dx=0$$

возможно лишь тогда, когда

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=0. \qquad (2.11)$$

Следовательно, J будет иметь экстремум только для таких кривых $y(x)$, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.11). Это уравнение обнаруживает большое сходство с уравнением Лагранжа.

Рассмотрим теперь несколько простых примеров на разыскание подобных экстремумов.

1. *Кратчайшее расстояние между двумя точками плоскости.* Длина элемента дуги плоской кривой равна

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Полная длина плоской кривой, соединяющей точки 1 и 2, равна

$$I=\int_1^2 ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

и чтобы кривая была кратчайшей, нужно, чтобы I было минимальным. Таким образом, мы имеем экстремальную задачу типа (2.3) при

$$f=\sqrt{1+\dot{y}^2}.$$

Подставляя это значение f в выражение (2.11) и учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}},$$

получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)=0,$$

или

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=c,$$

*) Символы δ мы могли, конечно, ввести с самого начала. Поэтому следует помнить, что в проведённом здесь рассуждении они фигурируют как символическая запись дифференциала при изменении параметра.

где c — некоторая постоянная. Это равенство может иметь место только в том случае, если

$$\dot{y} = a,$$

где a — постоянная, связанная с c соотношением

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Но из равенства $\dot{y} = a$ следует, что

$$y = ax + b,$$

где b — вторая постоянная интегрирования. Следовательно, искомая кривая является прямой. Строго говоря, мы доказали только то, что прямая является экстремалью, однако в данном случае ясно, что она реализует именно минимум интеграла I. Постоянные интегрирования a и b определяются из того условия, что искомая кривая проходит через две заданные конечные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Подобным способом можно найти и кратчайшую кривую между двумя точками сферы, для чего длину дуги на поверхности сферы нужно выразить через угловые сферические координаты. Кривые, реализующие кратчайшее расстояние между двумя точками заданной поверхности, называются *геодезическими линиями* этой поверхности.

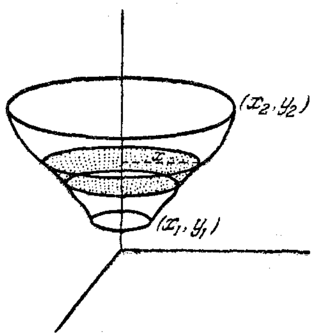

Рис. 11. Минимальная поверхность вращения.

2. *Минимальная поверхность вращения.* Рассмотрим поверхность, получаемую посредством вращения вокруг оси y некоторой кривой, проходящей через две заданные конечные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (рис. 11). Требуется найти такую кривую, для которой площадь указанной поверхности будет минимальной.

Площадь элементарной полоски этой поверхности равна $2\pi x\, ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx$, а полная площадь поверхности равна

$$2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx.$$

Экстремум этого интеграла может быть найден с помощью уравнения (2.11), в котором

$$f = x \sqrt{1 + \dot{y}^2},$$

и поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

Уравнение (2.11) имеет в этом случае вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)=0,$$

или

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=a,$$

где a — некоторая постоянная интегрирования (очевидно, меньшая, чем минимальное значение x). Возводя в квадрат обе части этого равенства и группируя члены, получаем

$$\dot{y}^2(x^2-a^2)=a^2,$$

или, разрешая его относительно производной, имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения (с учётом сказанного относительно a) имеет вид

$$y=a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}+b=a\operatorname{arcch}\frac{x}{a}+b$$

или

$$x=a\operatorname{ch}\frac{y-b}{a}.$$

Эта формула выражает уравнение цепной линии. Постоянные интегрирования a и b определяются, как и ранее, из того условия, что эта кривая должна проходить через две заданные конечные точки.

3. *Задача о брахистохроне.* Эта хорошо известная задача состоит в следующем. Пусть материальная точка, начальная скорость которой равна нулю, скользит под действием своего веса по некоторой кривой, проходящей через две заданные точки. Требуется найти такую кривую, чтобы при движении по ней от верхней точки до нижней требовалось наименьшее время.

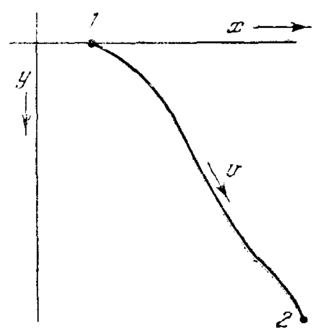

Рис. 12. Задача о брахистохроне.

Обозначим скорость движения точки вдоль этой кривой через v. Тогда время её движения вдоль ds будет равно $\frac{ds}{v}$, и задача сведётся к нахождению минимума интеграла

$$t_{12}=\int_1^2\frac{ds}{v}.$$

Если ось y направить вертикально вниз, а начало координат взять в точке, из которой начинается движение, то теорема о сохранении энергии рассматриваемой точки примет вид

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

или

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Тогда выражение для t_{12} запишется в виде

$$t_{12} = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx,$$

и, следовательно, f в данном случае будет равно

$$f = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2gy}}.$$

Интегрирование уравнения (2.11) производится здесь обычными методами, и мы предоставляем читателям проделать это в качестве одного из упражнений к этой главе. (Задача о брахистохроне хорошо известна в истории математики, так как, решая эту задачу, Иван Бернулли заложил основы вариационного исчисления.)

§ 2.3. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона. Основная задача вариационного исчисления легко обобщается на случай, когда f есть функция многих независимых переменных y_i и их производных $\dot{y}_i$. (Конечно, все эти величины рассматриваются как функции переменной x.) Тогда вариация интеграла J будет равна

$$\delta J = \delta \int\limits_1^2 f[y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ \dot{y}_1(x),\ \dot{y}_2(x),\ \ldots,\ x]\,dx. \tag{2.12}$$

Как и ранее, она может быть получена из рассмотрения J как функции α, где α — параметр, определяющий кривые $y_i(x,\ \alpha)$. Так, например, можно положить:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x,\ \alpha) &= y_1(x,\ 0) + \alpha\eta_1(x), \\ y_2(x,\ \alpha) &= y_2(x,\ 0) + \alpha\eta_2(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

где $y_1(x,\ 0)$, $y_2(x,\ 0)$, ... — кривые, реализующие экстремум (они подлежат определению), а η_1, η_2, ... — произвольные функции x, обращающиеся в нуль в конечных точках (они появляются при варьировании кривых с фиксированными конечными точками). Конечно, семейства (2.13) не являются единственно возможными и приведены нами лишь для иллюстрации. Дальнейшая процедура проводится здесь так же, как и ранее. Вариация J имеет вид

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx. \tag{2.14}$$

Интегрируя по частям интегралы, входящие во вторую сумму уравнения (2.14), получаем

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha\, \partial x} dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx,$$

где первое слагаемое правой части равно нулю, так как все кривые $y_i(x, \alpha)$ проходят через фиксированные конечные точки. Подставляя правую часть последнего равенства в уравнение (2.14), получаем δJ в виде

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i \, dx, \tag{2.15}$$

где аналогично равенству (2.10)

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha.$$

Так как переменные y_i являются независимыми, то вариации δy_i также будут независимыми (в частности, функции $\eta_i(x)$ в выражениях (2.13) являются независимыми). Следовательно, равенство $\delta J = 0$ будет иметь место тогда и только тогда, когда все коэффициенты при δy_i будут равны нулю. Таким образом, получаем уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.16}$$

являющиеся обобщением уравнения (2.11) на случай многих переменных. Система уравнений (2.16) известна под названием *системы дифференциальных уравнений Эйлера — Лагранжа*. Кривые, для которых вариация интеграла (2.12) равна нулю, описываются функциями $y_i(x)$, являющимися решениями системы (2.16).

Для рассмотренных нами вариационных задач возможны дальнейшие обобщения. Так, например, можно рассмотреть функцию f, содержащую высшие производные $\ddot{y}$, $\dddot{y}$ и т. д., что приведёт к уравнениям, отличным от уравнений (2.16). Кроме того, можно рассмотреть случаи, когда имеется несколько переменных x_j и интеграл J является кратным; функция f будет тогда содержать производные от y_i по каждому из переменных x_j. Наконец, можно рассматривать вариации, при которых конечные точки *не являются* фиксированными. Некоторые из этих обобщений будут рассмотрены нами позже. Пока же мы можем ограничиться интегралом типа (2.12), из которого интеграл Гамильтона

$$I=\int_1^2 L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)\,dt \tag{2.2'}$$

получается посредством формальной замены

$$x \to t$$

$$y_i \to q_i,$$

$$f(y_i,\ \dot{y}_i,\ x) \to L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t).$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа переходят тогда в известные уравнения движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

На этом мы заканчиваем доказательство того, что уравнения Лагранжа вытекают из принципа Гамильтона (для консервативных систем).

§ 2.4. Обобщение принципа Гамильтона на неконсервативные и неголономные системы. Принцип Гамильтона можно обобщить, по крайней мере формально, и на неконсервативные системы; при этом мы придём к уравнениям Лагранжа в форме (1.50). Обобщённый таким путём принцип записывается следующим образом:

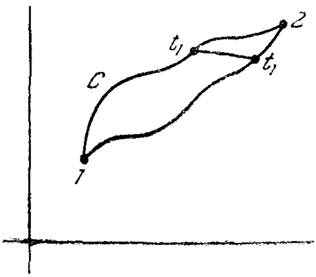

Рис. 13. Варьирование траектории в пространстве конфигураций.

$$\delta I=\delta\int_1^2 (T+W)\,dt=0, \tag{2.17}$$

причём конечные точки 1 и 2, как и ранее, должны быть фиксированными. Величина W определяется здесь равенством

$$W=\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot \boldsymbol{r}_i. \tag{2.18}$$

Вариация δW имеет важный физический смысл. Уже отмечалось, что вариации δq_i или $\delta \boldsymbol{r}_j$ подобны виртуальным перемещениям координат системы, так как время при этом не варьируется. Поэтому варьируемую нами в пространстве конфигураций траекторию можно мыслить как траекторию, получающуюся посредством ряда виртуальных перемещений точек истинной траектории C (рис. 13). Каждое такое виртуальное перемещение происходит в данный момент времени, и силы, действующие в этот момент на систему, имеют определённые значения. Поэтому δW является работой сил, действующих на систему во время виртуального перемещения от истинной траектории к соседней, получаемой в результате вариации. Следовательно, принцип Гамильтона в форме (2.17) можно сформулировать следующим образом: интеграл от суммы вариации кинетической энергии и виртуальной работы, обусловленной вариацией, должен равняться нулю.

Вариации $\delta \boldsymbol{r}_i$ можно выразить через δq_j, пользуясь уравнениями, связывающими $\boldsymbol{r}$ и q, причём каждое значение q будет связано с выбранной траекторией посредством параметра α:

$$r_i = r\,[q_j(\alpha,\ t),\ t].$$

Однако, воспользовавшись эквивалентностью вариаций δr_i и соответствующих виртуальных перемещений, можно эту процедуру сократить. Действительно, ранее было показано, что

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_j Q_j \, \delta q_j.$$

Следовательно, уравнение (2.17) можно записать в виде

$$\delta \int_1^2 T\,dt + \int_1^2 \sum_j Q_j \, \delta q_j \, dt = 0. \qquad (2.19)$$

Можно показать, что в случае, когда силы Q_j имеют обобщённый потенциал, уравнение (2.19) приводится к принципу Гамильтона в обычной форме. Действительно, интеграл от виртуальной работы будет тогда равен

$$\int_1^2 \sum_j Q_j \, \delta q_j \, dt = -\int_1^2 \sum_j \delta q_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) dt,$$

и, интегрируя по частям, будем иметь

$$-\int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \, \delta q_j + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \, \delta \dot{q}_j \right) dt = -\delta \int_1^2 V\,dt.$$

Уравнение (2.19) принимает вид

$$\delta \int_1^2 T\,dT - \delta \int_1^2 V\,dt = \delta \int_1^2 L\,dt = 0,$$

который совпадает с принципом Гамильтона в форме (2.2).

Перейдём теперь к более общему случаю. Так как кинетическая энергия T, подобно лагранжиану L консервативной системы, является функцией q_j и $\dot{q}_j$, то первый интеграл в левой части равенства (2.19) можно записать в виде

$$\delta \int_1^2 T\,dt = \int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j\,dt.$$

Объединяя два интеграла, получаем принцип Гамильтона в виде

$$\int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j\right)\delta q_j\,dt = 0. \tag{2.20}$$

Отсюда следует, что в случае голономных связей рассматриваемый интеграл будет равен нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты при δq_j будут равны нулю. Таким образом, получаем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \tag{2.21}$$

Отсюда видно, что уравнение (2.17) представляет обобщение принципа Гамильтона в форме (2.2), приводящее к уравнениям Лагранжа для случая неконсервативных сил.

Принцип Гамильтона можно распространить и на неголономные системы. При выводе уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона или из принципа Даламбера мы использовали требование голономности связей только на последнем этапе, когда считали вариации δq_j независимыми. В случае неголономной системы её обобщённые координаты не являются независимыми и не могут быть связаны друг с другом уравнениями связи вида $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$. Однако рассмотрение неголономных систем оказывается возможным, если уравнения их связей можно представить в виде

$$\sum_k a_{lk}\,dq_k + a_{lt}\,dt = 0, \tag{2.22}$$

т. е. в виде равенств, связывающих *дифференциалы* координат q. Заметим, что вариации, содержащиеся в принципе Гамильтона, являются такими, при которых время остаётся постоянным (для каждой точки траектории). Следовательно, содержащиеся в вариациях виртуальные перемещения δq должны удовлетворять уравнениям связи

$$\sum_k a_{lk}\,\delta q_k = 0. \tag{2.23}$$

Индекс l появляется здесь потому, что таких уравнений может быть несколько; мы будем считать, что имеется m подобных уравнений, т. е. что $l = 1, 2, \ldots, m$.

Теперь мы можем воспользоваться уравнениями (2.23) и сократить число виртуальных перемещений, оставив только независимые вариации δq. Исключение этих лишних виртуальных перемещений мы проведём по так называемому *методу неопределённых множителей Лагранжа.*

Из уравнения (2.23) следует равенство

$$\lambda_l \sum_k a_{lk}\,\delta q_k = 0, \tag{2.24}$$

где λ_l ($l = 1, 2, \ldots, m$) — некоторые пока не определённые величины в общем случае функции времени. Эти m уравнений мы рассмотрим совместно с уравнением (2.20), которое в случае консервативных систем имеет вид

$$\int_1^2 dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k = 0. \tag{2.20'}$$

С этой целью просуммируем уравнения (2.24) по l, а затем проинтегрируем полученную сумму от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 \sum_{k,\,l} \lambda_l a_{lk}\,\delta q_k\,dt = 0. \tag{2.25}$$

Складывая это равенство с уравнением (2.20′), получаем соотношение

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk}\right)\delta q_k, \tag{2.26}$$

в котором вариации δq_k не являются еще независимыми, так как они связаны m соотношениями (2.23). Можно сказать, что первые $n-m$ из этих вариаций могут быть выбраны произвольно и тогда последние m вариаций определятся уравнениями (2.23). Однако величинами λ_l мы можем распоряжаться по своему усмотрению. Предположим теперь, что мы выбрали их так, что выполняются равенства

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0 \qquad (k = n-m+1, \ldots, n), \tag{2.27}$$

имеющие структуру уравнений движения для m последних переменных q_k. Тогда, считая, что λ_l удовлетворяют уравнениям (2.27), мы можем записать равенство (2.26) в виде

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk}\right)\delta q_k = 0. \tag{2.28}$$

В этом равенстве независимыми являются все входящие в него вариации δq_k. Следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m). \tag{2.29}$$

Объединяя уравнения (2.27) и (2.29), мы окончательно получаем полную систему уравнений Лагранжа для неголономных систем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.30}$$

Однако эти уравнения ещё не решают задачи, так как теперь мы имеем $n+m$ неизвестных: n координат q_k и m коэффициентов λ_l, тогда как система (2.30) даёт нам только n уравнений. Недостающими уравнениями здесь, очевидно, будут сами уравнения связи, т. е. уравнения (2.22), связывающие координаты q_k. Однако теперь их следует рассматривать как дифференциальные уравнения и писать в виде

$$\sum_k a_{lk}\dot{q}_k + a_{lt} = 0. \tag{2.31}$$

Уравнения (2.30) и (2.31) образуют систему $n+m$ уравнений относительно $n+m$ неизвестных.

Следует заметить, что в процессе проведённых рассуждений мы получили больше результатов, чем предполагали, так как мы определили не только n координат q_k, но и m коэффициентов λ_l. Каков же физический смысл этих коэффициентов? Предположим, что мы освобождаем нашу систему от наложенных на неё связей и вместо этого прикладываем к ней внешние силы Q'_k, делая это так, чтобы не изменить движения системы. Тогда и уравнения движения останутся теми же самыми, и ясно, что силы Q'_k будут равны реакциям связей, так как они являются силами, заставляющими систему двигаться в соответствии с условиями связей. При наличии сил Q'_k уравнения движения будут записываться в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k,$$

но они должны совпадать с уравнениями (2.30). Следовательно, сумму $\sum \lambda_l a_{lk}$ мы можем считать равной Q_k (обобщённая сила реакции связи). Таким образом, в задачах этого типа мы в сущности не исключаем силы реакции, а получаем их как часть решения.

Заметим, что связь (2.22) не является неголономной связью самого общего типа. Так, например, этим путём нельзя задать связь, выражаемую неравенствами. С другой стороны, она включает и голономные связи. Уравнение голономной связи вида

$$f(q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_n,\ t) = 0$$

эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\, dq_k + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt = 0, \tag{2.32}$$

которое будет совпадать с уравнением (2.22), если положить:

$$a_{lk}=\frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad a_{lt}=\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{2.33}$$

Таким образом, метод множителей Лагранжа можно использовать и в случае голономных связей. Это целесообразно делать в двух случаях: 1) когда оказывается неудобным сводить все координаты q к одним только независимым, 2) когда мы желаем определить реакции связей.

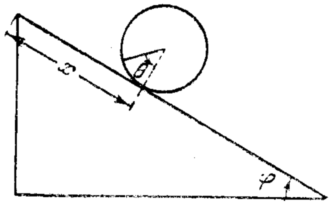

Рис. 14. Обруч, катящийся по наклонной плоскости.

В качестве иллюстрации изложенного метода рассмотрим следующий довольно тривиальный пример (рис. 14). Круглый обруч скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол φ с горизонтом. Получим уравнения движения этого обруча. (Следует заметить, что связь «качения» является в данном случае голономной, однако этот факт для нас несущественен.)

Обобщёнными координатами здесь будут x и θ, как показано на рис. 14. Уравнение связи в данном случае имеет вид

$$r\,d\theta=dx.$$

Раскладывая кинетическую энергию этой системы на кинетическую энергию центра масс и кинетическую энергию вращения вокруг центра масс, получаем

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2.$$

Потенциальная энергия этой системы равна

$$V=Mg(l-x)\sin\varphi,$$

где l — длина наклонной плоскости. Поэтому лагранжиан системы будет иметь вид

$$L=T-V=\frac{M\dot{x}^2}{2}+\frac{Mr^2\dot{\theta}^2}{2}-Mg(l-x)\sin\varphi.$$

Так как здесь имеется только одно уравнение связи, то нам нужен лишь один множитель Лагранжа. Коэффициентами уравнения связи здесь будут:

$$a_\theta=r,$$
$$a_x=1,$$

и поэтому два уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$M\ddot{x}-Mg\sin\varphi+\lambda=0, \tag{2.34}$$

$$Mr^2\ddot{\theta}-\lambda r=0. \tag{2.35}$$

Вместе с уравнением связи

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \tag{2.36}$$

они образуют систему трёх уравнений с тремя неизвестными: θ, x, λ.

Дифференцируя уравнение (2.36) по времени, получаем

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}$$

и, подставляя в уравнение (2.35), будем иметь

$$M\ddot{x} = \lambda.$$

Уравнение (2.34) принимает вид

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \varphi}{2}.$$

Далее находим:

$$\lambda = \frac{Mg \sin \varphi}{2},$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \varphi}{2r}.$$

Таким образом, ускорение обруча, катящегося по наклонной плоскости, оказывается вдвое меньше того, которое он имел бы, если бы скользил по плоскости без трения. Развиваемая при этом связью сила трения равна $\lambda = \frac{1}{2} Mg \sin \varphi$.

Из равенства $\ddot{x} = v \frac{dv}{ds}$ получаем, что конечная скорость этого обруча равна $v = \sqrt{gl \sin \varphi}$. Этот результат можно, конечно, получить и элементарными методами.

§ 2.5. Преимущества вариационной концепции. Хотя принцип Гамильтона в форме (2.2) можно распространить на случай неконсервативных систем и неголономных связей, однако практически этот принцип наиболее полезен тогда, когда можно составить лагранжиан из независимых координат. Вариационный принцип Гамильтона в компактной форме содержит в себе всю механику консервативных голономных систем. Кроме того, этот принцип имеет то достоинство, что в его формулировке фигурируют только такие физические величины, которые не связаны с частной системой обобщённых координат (кинетическая и потенциальная энергии). Поэтому этот прицип автоматически инвариантен относительно преобразования обобщённых координат системы.

Другое достоинство этого принципа состоит в том, что его можно легко распространить на системы, не являющиеся чисто механическими, например, на упругие среды, электромагнитные поля, поля элементарных частиц и т. д. Позже мы рассмотрим некоторые из этих обобщений, а сейчас проиллюстрируем это на примере следующей простой системы, выходящей за обычные рамки механики. Предположим, что мы имеем систему, лагранжиан которой имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\sum L_j\dot{I}_j^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{jk\\ j\neq k}} M_{jk}\dot{I}_j\dot{I}_k-\sum_j \frac{I_j^2}{2C_j}+\sum_j \dot{E}_j(t)\,I_j, \tag{2.37}$$

а диссипативная функция равна

$$\mathfrak{F}=\frac{1}{2}\sum_j R_j\dot{I}_j^2. \tag{2.38}$$

(Обобщёнными координатами q_j здесь являются величины I_j.) Уравнения Лагранжа этой системы будут иметь вид

$$L_j\frac{d^2I_j}{dt^2}+\sum_{\substack{k\\ j\neq k}} M_{jk}\frac{d^2I_k}{dt^2}+R_j\frac{dI_j}{dt}+\frac{I_j}{C_j}=\dot{E}_j(t). \tag{2.39}$$

Этим уравнениям движения можно дать, по крайней мере, две интерпретации. Пусть, например, I_j будут силами тока, L_j — коэффициентами самоиндукции, M_{jk} — коэффициентами взаимной индукции, R_j — сопротивлениями, C_j — ёмкостями и E_j — внешними электродвижущими силами. Тогда уравнения (2.39) будут описывать систему электрических контуров с индуктивной связью. Так, например, при $j=1,\ 2,\ 3$ мы получим три контура, схематически изображённых на рис. 15.

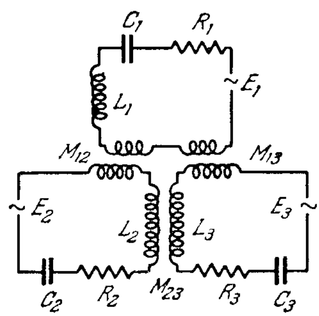

Рис. 15. Система электрических контуров с индуктивной связью. Эту систему можно описать с помощью уравнений Лагранжа.

С другой стороны, легко видеть, что два первых члена в выражении для L представляют некоторую однородную квадратичную функцию обобщённых скоростей. Всякий раз, когда связи (голономные) системы не зависят от времени, кинетическая энергия её T имеет как раз такой вид. Коэффициенты L_j и M_{jk} играют при этом роль некоторых масс — они являются *инерционными членами*. Следующий член лагранжиана можно трактовать как потенциальную энергию системы пружин — гармонических вибраторов, — подчиняющихся закону Гука. Тогда упругая сила такой пружины будет равна

$$F=-kx,$$

а потенциальная энергия её будет иметь вид

$$V=\frac{kx^2}{2}.$$

Поэтому коэффициенты $1/C_j$ можно трактовать как жёсткости этих пружин. Наконец, последний член лагранжиана можно рассматривать как потенциал, вызванный движущими силами $\dot{E}_j = Q_j$, не зависящими от координат, например гравитационными силами. (Силы $\dot{E}_j$ могут, однако, зависеть от времени.) Что касается диссипативной функции (2.38), то её можно считать вызванной наличием диссипативных (вязких) сил, пропорциональных обобщённым скоростям. Такова вторая интерпретация уравнений (2.39) [или функций (2.37), (2.38)]. Согласно этой интерпретации уравнения (2.39) описывают сложную систему масс, связанных пружинами и движущихся в вязкой жидкости под действием внешних сил. Таким образом, мы описали движение двух различных физических систем посредством одного и того же лагранжиана. Отсюда следует, что все результаты и методы исследования, связанные с одной из этих систем, могут быть непосредственно применены и к другой. Так, например, для изучения рассмотренных выше электрических контуров был разработан целый ряд специальных методов, которые применимы и к соответствующим механическим системам. Таким путём было установлено много аналогий между электрическими и механическими или акустическими системами. В связи с этим термины, применяемые при описании электрических колебательных контуров (реактанс, реактивное сопротивление и т. д.), вполне допустимы и в теории механических колебательных систем *).

Возможны, однако, и другие обобщения классической механики, порождаемые более тонкой аналогией. Мы видели, что принцип Гамильтона даёт возможность компактно и инвариантно сформулировать уравнения механического движения. Подобная возможность имеется, однако, не только в механике. Почти во всех областях физики можно сформулировать вариационные принципы, позволяющие получить «уравнения движения», будь то уравнения Ньютона, уравнения Максвелла или уравнения Шрёдингера. Если подобные вариационные принципы положить в основу соответствующих областей физики, то все такие области будут обладать в известной степени структурной аналогией. И если результаты экспериментов указывают на необходимость изменения физического содержания той или иной теории, то эта аналогия часто показывает, как следует произвести подобные изменения в других областях. Так, например, эксперименты, выполненные в начале этого века, указали на то, что как электромагнитное излучение, так и элементарные частицы обладают квантовой природой. Однако методы квантования были сначала развиты для механики элементарных частиц, описываемой классическими уравнениями Лагранжа. Если электромагнитное поле описывать с помощью

---

*) Для более подробного ознакомления см. H. F. Olson, Dynamical Analogies, Нью-Йорк, 1946. (Имеется русский перевод: Ольсон Гарри Ф., Динамические аналогии, М., ИЛ, 1947.)

лагранжиана и вариационного принципа Гамильтона, то методами квантования элементарных частиц можно будет воспользоваться для построения квантовой электродинамики (см. § 11.5).

§ 2.6. Теоремы о сохранении; свойства симметрии. До сих пор мы занимались главным образом получением уравнений движения и очень мало говорили о методах их решения в тех или иных конкретных случаях (для которых эти уравнения уже получены). Вообще говоря, этот вопрос является математическим. Мы видели, что система с n степенями свободы будет описываться n дифференциальными уравнениями второго порядка относительно времени. Решение каждого такого уравнения потребует двукратного интегрирования, что приведёт к появлению (для n уравнений) $2n$ постоянных. В каждом конкретном случае эти постоянные будут определяться начальными условиями, т. е. начальными значениями n координат q_j и n скоростей $\dot{q}_j$. В некоторых случаях эти уравнения можно проинтегрировать в элементарных функциях, однако это удается сделать далеко не всегда; в большей части случаев эти уравнения оказываются неинтегрируемыми. Но даже в этих случаях часто удаётся получить достаточное количество сведений относительно физической картины изучаемого движения. Эти сведения могут в ряде случаев иметь для физиков больший интерес, нежели точное знание функций $q_j(t)$. Поэтому важно знать, как много сведений можно получить относительно движения данной системы, не интегрируя полностью её уравнений.

Во многих задачах можно сразу получить первые интегралы уравнений движения. Мы имеем в виду соотношения вида

$$f(q_1, q_2, \ldots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, t) = \text{const}, \tag{2.40}$$

представляющие дифференциальные уравнения первого порядка. Эти первые интегралы представляют известный интерес, так как они дают некоторые физические данные о движении системы. В дальнейшем мы увидим, что они включают в себя и законы о сохранении, полученные в главе 1.

Рассмотрим теперь систему, находящуюся под действием консервативных сил (потенциал которых зависит только от положения системы). В этом случае будем иметь

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i = p_{ix},$$

где p_{ix} — x-компонента импульса, необходимого для создания количества движения $m_i v_i$. Основываясь на этом соотношении, можно обобщить понятие импульса. Под *обобщённым импульсом* или *обобщённым количеством движения* понимают величину

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \tag{2.41}$$

Таким образом, каждой координате q_j соответствует обобщённый импульс p_j. Величину p_j часто называют также *каноническим импульсом* или *импульсом, соответствующим координате* q_j. Заметим, что если q_j не есть декартова координата, то p_j может и не иметь размерности импульса. Кроме того, если потенциал системы зависит от скорости, то даже тогда, когда q_j является декартовой координатой, соответствующий обобщённый импульс не будет совпадать с обычным импульсом в механическом смысле этого слова. Так, например, в случае частиц, находящихся в электромагнитном поле, лагранжиан имеет вид

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \sum_i q_i \varphi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} A(x_i) \cdot \dot{r}_i$$

[см. (1.61)]. Поэтому обобщённый импульс, соответствующий координате x_i, будет равен

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{q_i A_x}{c}, \tag{2.42}$$

т. е. механическому импульсу плюс некоторый добавочный член.

Если лагранжиан системы не содержит некоторой координаты q_j (при этом он может содержать соответствующую скорость $\dot{q}_j$), то эту координату называют *циклической* или *игнорируемой*. (Термин «циклическая координата» не является общепринятым *), но он довольно распространён, и мы будем им пользоваться). Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

будет для такой координаты иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

или

$$\frac{dp_j}{dt} = 0,$$

откуда

$$p_j = \text{const}. \tag{2.43}$$

*) Понятия «циклическая координата» и «игнорируемая координата» обычно считаются тождественными и имеющими указанный выше смысл. Однако некоторые авторы делают различие между этими понятиями, определяя циклическую координату как координату, не входящую в кинетическую энергию T, а игнорируемую координату — как координату, не входящую в лагранжиан [см. Webster, The Dynamics of Particles (имеется русский перевод: Вебстер А., Механика материальных точек твёрдых, упругих и жидких тел, М. — Л., ГТТИ, 1933) и Byerly, Generalized Coordinates]. Эймс и Мэрнаган (Ames и Murnaghan, Theoretical Mechanics) пользовались обоими этими терминами, считая их эквивалентными, но, по-видимому, понимали под этим такие координаты, которые не входят в T.

Таким образом, мы можем сформулировать следующую общую теорему о сохранении:

Если координата q_j является циклической, то соответствующий обобщённый импульс остаётся постоянным.

Равенство (2.43) представляет собой первый интеграл типа (2.40) и оно может быть использовано для формального исключения циклической координаты. После такого исключения мы получим систему уравнений, содержащих только оставшиеся нециклические координаты, и задача сведётся к решению этой системы. В связи с этим Раусом был предложен метод, состоящий в такой модификации лагранжиана, при которой исчезают функции циклических скоростей $\dot{q}_j$, а вместо них появляются соответствующие импульсы p_j. Преимущество такого приёма состоит в том, что он позволяет рассматривать эти импульсы p_j как постоянные интегрирования, и тогда последующее интегрирование будет относиться только к нециклическим координатам. Подробное рассмотрение метода Рауса мы отложим до тех пор, пока не познакомимся с так называемым гамильтонианом, с которым этот метод тесно связан.

Заметим, что условия, при которых справедлива теорема о сохранении обобщённого импульса, являются более общими, чем те, при которых верны теоремы о сохранении количества движения и кинетического момента, полученные ранее. Так, например, полученная сейчас теорема о сохранении справедлива и тогда, когда нарушается закон равенства действия и противодействия, что имеет место при наличии электромагнитных сил. Пусть, например, мы имеем свободную частицу, находящуюся в электромагнитном поле, причём функции φ и $\boldsymbol{A}$ не зависят от x. Тогда x не войдёт и в L и, следовательно, эта координата будет циклической. Поэтому соответствующий обобщённый импульс p_x должен оставаться постоянным. Согласно (1.61) этот импульс равен

$$p_x = m\dot{x} + \frac{qA_x}{c} = \text{const} \tag{2.44}$$

и, как показывает эта формула, он не является обычным механическим количеством движения $m\dot{x}$, а отличается от него на величину $\frac{qA_x}{c}$ *).

Покажем теперь, что теоремы о сохранении, доказанные нами в главе 1, § 2, могут быть получены из равенства (2.43) для циклических координат. Выберем для этого обобщённую координату q_j таким образом, чтобы дифференциал её dq_j был равен перемещению

---

*) Основываясь на классической электродинамике, можно показать, что если $\boldsymbol{A}$ и φ не зависят от x, то величина $\frac{qA_x}{c}$ будет равна x-компоненте электромагнитного импульса поля, связанного с зарядом q.

рассматриваемой системы как одного целого в заданном направлении. Примером такой координаты может служить одна из декартовых координат центра масс системы. Тогда ясно, что q_j не будет входить в выражение для T, так как смещение системы в целом не влияет на скорости её точек. Поэтому $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ будет равно нулю. Кроме того, потенциал системы V мы будем считать не зависящим от скоростей (чтобы исключить такие аномальные силы, как электромагнитные). Тогда уравнение Лагранжа для рассматриваемой координаты q_j будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j. \qquad (2.45)$$

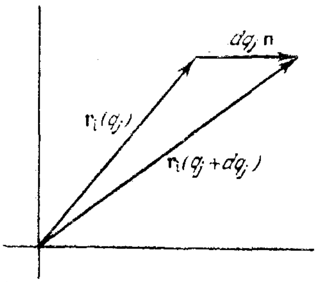

Рис. 16. Изменение радиуса-вектора точки при поступательном перемещении системы.

Покажем теперь, что это уравнение выражает теорему о количестве движения, т. е. что Q_j представляет сумму составляющих всех сил в направлении q_j, а p_j — составляющую количества движения системы в этом же направлении. Мы знаем, что обобщённая сила Q_j определяется равенством

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}.$$

Но так как в данном случае dq_j есть перемещение системы вдоль некоторой оси, то векторы $\boldsymbol{r}_i(q_j)$ и $\boldsymbol{r}_i(q_j + dq_j)$ будут выглядеть так, как это показано на рис. 16. Поэтому, дифференцируя $\boldsymbol{r}_i$ по q_j, получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \to 0} \frac{\boldsymbol{r}_i(q_j + dq_j) - \boldsymbol{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j \boldsymbol{n}}{dq_j} = \boldsymbol{n}, \qquad (2.46)$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор в направлении перемещения dq_j. Следовательно,

$$Q_j = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{F}.$$

Таким образом, Q_j, как это утверждалось выше, есть составляющая полной силы $\boldsymbol{F}$ в направлении $\boldsymbol{n}$. Чтобы доказать вторую половину нашего утверждения, заметим, что если кинетическая энергия T имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{r}_i^2,$$

то обобщённый импульс, соответствующий координате q_j, можно на основании (1.48) записать в виде

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}.$$

Тогда из (2.46) получим:

$$p_j = \boldsymbol{n} \cdot \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i.$$

Таким образом, мы доказали вторую часть сделанного утверждения, что p_i есть составляющая полного количества движения системы в направлении $\boldsymbol{n}$.

Предположим теперь, что рассматриваемая нами координата q_j является циклической. Тогда q_j не войдёт в V, и, следовательно, будем иметь

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0.$$

В этом случае мы получаем обычную теорему о сохранении количества движения, утверждающую, что если одна из составляющих полной силы $\boldsymbol{F}$ будет равна нулю, то соответствующая составляющая количества движения будет постоянной.

Аналогично можно показать, что если циклическая координата q_j такова, что dq_j соответствует вращению системы вокруг некоторой оси, то равенство $p_j = \text{const}$ выражает теорему о сохранении кинетического момента системы. Докажем это.

Рассуждая так же, как и раньше, мы приходим к выводу, что координата q_j не может входить в выражение для T, так как поворот системы не может влиять на величину скоростей её точек. Следовательно, $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ должно равняться нулю, а так как V не зависит от $\dot{q}_j$, то мы опять получаем уравнение (2.45). Но так как q_j является теперь угловой координатой, то нам нужно показать, что обобщённая сила Q_i будет суммарным моментом всех сил относительно оси вращения, а p_j — полным кинетическим моментом системы относительно той же оси. Обобщённая сила Q, как и ранее, равна

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j},$$

но производная $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ имеет теперь другой геометрический смысл. Изменение координаты q_j означает теперь бесконечно малый поворот вектора $\boldsymbol{r}_i$ при сохранении его длины, и поэтому будем иметь:

$$|d\boldsymbol{r}_i| = r_i \sin\theta \, dq_j$$

(рис. 17). Следовательно,

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right| = r_i \sin\theta,$$

причём направление этого вектора будет перпендикулярно к $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{n}$. Учитывая это, мы можем написать

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i, \tag{2.47}$$

и тогда получим

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i,$$

или

$$Q_j = \boldsymbol{n} \cdot \sum_i \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{N},$$

что доказывает первую часть нашего утверждения. Совершая затем аналогичные преобразования над величиной p_j, получаем

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{n} \cdot \sum_i \boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}.$$

Таким образом, доказана вторая часть сделанного нами утверждения. Итак, если угловая координата q_j будет циклической, то обобщённая сила Q_j, являющаяся моментом всех действующих сил относительно оси $\boldsymbol{n}$, будет равна нулю; кинетический момент системы относительно оси $\boldsymbol{n}$ будет при этом постоянным. Таким образом, мы вновь доказали теорему о сохранении кинетического момента, получив её из общей теоремы о сохранении для циклических координат.

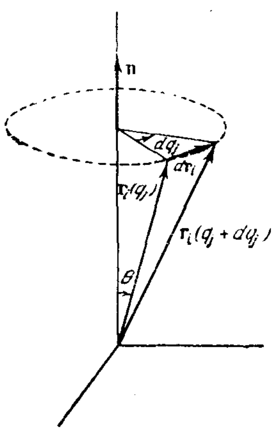

Рис. 17. Изменение радиуса-вектора точки при повороте системы.

Циклические координаты, описывающие перемещения или вращения, играют важную роль при исследовании свойств системы. Поэтому они заслуживают того, чтобы на них остановиться несколько подробнее. Если координата, описывающая перемещение системы, является циклической, то это означает, что перемещение системы как твёрдого тела не отражается на её динамических характеристиках. Вследствие этого, если система *инвариантна* относительно перемещения вдоль данного направления, то соответствующее количество движения сохраняется постоянным. Аналогично, если циклической координатой будет координата, описывающая поворот (и поэтому будет оставаться постоянным кинетический момент системы), то система будет инвариантна относительно вращения вокруг данной оси. Таким образом, теоремы о сохранении количества движения и кинетического момента тесно связаны со *свойствами симметрии* системы. Если, например, система обладает сферической симметрией, то мы можем сразу утверждать, что все составляющие её кинетического момента будут оставаться постоянными. Если же система симметрична только относительно оси z, то неизменным будет оставаться только кинетический момент L_z, и аналогично для других осей. С зависимостью между постоянными, характеризующими движение, и свойствами симметрии мы ещё несколько раз встретимся.

Другой теоремой о сохранении, которую мы также получим сейчас с помощью лагранжиана, является теорема о сохранении полной энергии консервативной системы. Рассмотрим консервативную систему, для которой $F = -\nabla V$, где V — функция, не зависящая от скорости. Кроме того, введём дополнительное ограничение, потребовав, чтобы связи не зависели от времени. Тогда L не будет явно зависеть от t, и производная $\frac{dL}{dt}$ будет равна

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt}. \tag{2.48}$$

Но согласно уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

и поэтому можно написать

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt},$$

или

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

и, следовательно,

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H, \tag{2.49}$$

где H есть некоторая постоянная. Это уравнение можно также записать в виде

$$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L. \tag{2.50}$$

Таким образом, мы получили первый интеграл уравнений движения. Покажем теперь, что правая часть равенства (2.50) представляет собой полную энергию рассматриваемой системы.

Для консервативных систем (V не зависит от скоростей $\dot{q}_j$) имеем:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},$$

и поэтому первый член правой части (2.50) равен

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Но в § 1.6 было показано, что если связи не зависят от времени [или, точнее, если формулы (1.36) не содержат явно t], то кинетическая энергия T есть однородная квадратичная функция $\dot{q}_j$. Далее следует вспомнить теорему Эйлера, согласно которой для всякой однородной функции $f(q_j)$ справедливо тождество

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = nf,$$

где n — порядок однородной функции. В данном случае n равно двум и, следовательно,

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T. \qquad (2.51)$$

Отсюда

$$H = 2T - (T - V) = T + V. \qquad (2.52)$$

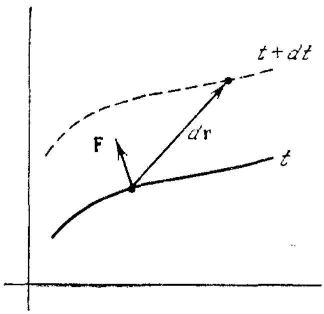

Рис. 18.

Это равенство выражает теорему о сохранении полной энергии системы.

Эта теорема получена сейчас более строгим путём, чем в главе 1, и мы видим, что, кроме консервативности сил, здесь нужно потребовать ещё, чтобы связи не зависели от времени. В сущности эти теоремы говорят не совсем об одной и той же энергии. В теореме, сформулированной нами ранее, изменение энергии системы определяется работой всех сил, включая реакции связей. Здесь же в новой формулировке энергия V определяется работой лишь активных сил и не включает в себя работу реакций. При связях, не зависящих от времени, между этими теоремами нет существенной разницы, так как мы знаем, что реакции связей, не зависящих от времени, не совершают работы при виртуальных перемещениях и поэтому их потенциал является величиной постоянной. Однако если имеется движущаяся связь, то её реакция может не быть перпендикулярной к действительному перемещению, и поэтому работа, совершаемая такими реакциями, может быть отличной от нуля. Так, например, если движение точки ограничено перемещением по некоторой движущейся кривой, то в каждый момент времени t реакция связи будет нормальна к этой кривой, однако перемещение точки за время dt уже не будет направлено по касательной к ней (рис. 18). Потенциал подобных реакций связи будет изменяться со временем, и поэтому весьма существенно, входит ли в «полную энергию» этой системы доля, обусловленная реакциями связей *).

Задачи

1. Доказать, что кратчайшим расстоянием между двумя точками пространства является длина отрезка прямой, соединяющей эти точки.

2. Показать, что геодезическими линиями сферы являются окружности, центры которых совпадают с центром сферы (большие круги).

3. Закончить решение задачи о брахистохроне, начатое в § 2.2, и показать, что искомая кривая является циклоидой, точка заострения которой находится в начальной точке движения. Показать, кроме того, что если движение начинается с кинетической энергией $\frac{1}{2}mv_0^2$, то брахистохрона также будет циклоидой, но точка заострения её будет находиться на высоте $z=\frac{v_0^2}{2g}$ над начальной точкой движения.

4. Решая в § 2.2 задачу об экстремуме интеграла $\int f\,dx$, мы считали, что $f=f(x, y, \dot{y})$, где $\dot{y}=\frac{dy}{dx}$. Показать, что если функция f содержит ещё $\ddot{y}=\frac{d^2y}{dx^2}$, то уравнение Эйлера — Лагранжа будет иметь вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \ddot{y}^2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}+\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

5. Из опыта установлено, что, падая без начальной скорости, материальная точка проходит путь y_0 за время $t_0=\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$. Предположим, далее, что для $y \neq y_0$ время падения её неизвестно и что о зависимости y от t известно только то, что она имеет вид $y=at+bt^2$. Показать, что если

---

*) Следует заметить, что формулы перехода к обобщённым координатам могут содержать время явным образом и по причинам, отличным от движения связей, например в случае вращающихся координатных осей. Тем не менее, может случиться, что лагранжиан не будет при этом содержать времени явным образом. Величина H будет тогда постоянной, но так как T не будет при этом однородной функцией скоростей, то H более уже не будет равно $T+V$. Ясно, что энергия системы также будет в этих случаях постоянной. Использование, например, вращающейся системы координат оказывается удобным в математическом отношении и не изменяет, конечно, физического существа явления (см. гл. 8).

постоянные a и b выбрать так, чтобы время падения с высоты y_0 было равно указанному значению t_0, то интеграл

$$\int_0^{t_0} L\,dt$$

будет иметь экстремум только при $a=0$ и $b=\frac{g}{2}$, т. е. при истинных значениях этих коэффициентов.

6. В случае, когда силы действуют в течение весьма короткого промежутка времени (например, при ударе двух тел), их называют *импульсивными.* Под импульсом силы F понимается интеграл

$$\int_{\Delta t} F\,dt,$$

где Δt — бесконечно малый промежуток времени, в течение которого действует эта сила. Показать, что при наличии импульсивных сил уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_i = S_j,$$

где индексы i и f относятся к состоянию системы до и после приложения импульсивных сил, S_j обозначает импульс обобщённой силы, соответствующей координате q_j, а L — лагранжиан системы с учётом всех неимпульсивных сил, не зависящих от скоростей.

7. Тяжёлая материальная точка скатывается с вершины круглого вертикального обруча. Вычислить реакцию обруча с помощью метода неопределённых множителей Лагранжа. Найти высоту, на которой материальная точка покидает обруч.

8. Тяжёлая материальная точка движется по внутренней поверхности параболоида, ось которого вертикальна, а вершина находится на поверхности Земли. Составить лагранжиан и найти реакции связи с помощью метода множителей Лагранжа. Показать, что давление точки на поверхность параболоида пропорционально радиусу кривизны параболы в этой точке.

9. Пусть потенциал, фигурирующий в лагранжиане, содержит члены, зависящие от скорости, и пусть θ будет координатой, характеризующей поворот системы в целом. Показать, что соответствующий обобщённый импульс p_θ будет не обычным кинетическим моментом L_θ, а будет определяться равенством

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}_i \times \nabla_{vi} U),$$

где ∇_v — градиент, полученный посредством дифференцирования по составляющим скорости, а $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор вдоль оси вращения. Если силы имеют электромагнитную природу, то обобщённый импульс будет равен

$$p_\theta = L_\theta + \sum_i \boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{r}_i \times \frac{q_i}{c}\boldsymbol{A}_i\right).$$

10. Пусть система такова, что

$$T=\sum_i f_i(q_i)\,\dot{q}_i^2, \qquad V=\sum_i V_i(q_i).$$

Показать, что уравнения Лагранжа распадаются в этом случае на ряд независимых уравнений, решение которых всегда можно свести к квадратурам.

Рекомендуемая литература

H. Margenau и G. M. Murphy, The Mathematics of Physics and Chemistry.

По вариационному исчислению имеется много книг, однако в большинстве случаев они в математическом отношении далеко выходят за пределы того, что нужно для изложения принципа Гамильтона. Краткое изложение этого вопроса, содержащееся в главе 6 указываемой книги, является более чем достаточным для наших целей.

G. A. Bliss, Calculus of Variations.

В этой книге довольно подробно рассмотрены экстремальные задачи, которые привели к созданию вариационного исчисления.

E. T. Whittaker, Analytical Mechanics.

В отношении большинства вопросов, рассмотренных в настоящей главе, эта книга является, пожалуй, одной из лучших. Теоремы о сохранении изложены в ней в главе III, а принцип Гамильтона как следствие уравнений Лагранжа — в главе IX.

A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, т. 1, Mechanik *).

Книга представляет собой прекрасный учебник, написанный в характерном для автора отличном стиле. К сожалению, в ней рассмотрены не все вопросы, представляющие интерес, и, кроме того, можно было бы пожелать некоторых изменений в выборе и распределении материала этой книги, однако вряд ли можно высказать недовольство изложением тех вопросов, которые там затронуты. В отношении материала данной главы в этой книге особенно интересны разделы 33—36.

W. E. Byerly, Generalized Coordinates.

Небольшая книга, особенно полезная благодаря подробным примерам решения механических задач методом Лагранжа. Досадным недостатком этой книги являются неудачные обозначения, несколько затрудняющие её чтение.

W. F. Osgood, Mechanics.

В этой книге представляет интерес глава X, в которой рассмотрено обобщение уравнений Лагранжа на случай неголономных систем с применением метода неопределённых множителей Лагранжа.

H. F. Olson, Dynamical Analogies.

В этой книге весьма подробно рассмотрены системы электрических колебательных контуров, эквивалентных данным механическим и акустическим системам. Кроме того, автор показывает, как методы исследования этих электрических систем применяются к решению чисто механических или акустических задач.

J. J. Thomson, Applications of Dynamics to Physics and Chemistry.

Эта книга представляет собой небольшой том, в котором изложены первые исследования автора. Многообразие различных химических, термодинамических и электрических задач автор пытается охватить здесь одним методом — посредством составления лагранжиана. Однако он не применяет этого метода к силовым полям, т. е. не рассматривает наиболее плодотворного в настоящее время принципа Гамильтона. Современному читателю изложение этой книги может показаться несколько бледным.

---

*) Имеется русский перевод: А. Зоммерфельд, Механика, ИЛ, 1951.

ГЛАВА 3

ПРОБЛЕМА ДВУХ ТЕЛ

Для иллюстрации изложенных методов рассмотрим в этой главе задачу о двух телах, движущихся под действием взаимного притяжения или отталкивания. Следует заметить, что задача о движении тела под действием центральной силы не всегда решается в элементарных функциях. Однако мы попытаемся исследовать эту проблему настолько полно, насколько это позволяют известные методы.

§ 3.1. Сведение проблемы к эквивалентной задаче для одного тела. Рассмотрим консервативную систему, состоящую из двух точек с массами m_1 и m_2. Единственными силами, действующими на эти точки, мы будем считать силы, обусловленные потенциалом взаимодействия V, относительно которого мы будем предполагать, что он является функцией вектора $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, относительной скорости $\dot{\boldsymbol{r}}_1 - \dot{\boldsymbol{r}}_2$ и производных более высокого порядка от $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. Рассматриваемая система имеет шесть степеней свободы и, следовательно, характеризуется шестью независимыми обобщёнными координатами. В качестве таких координат мы выберем три составляющих радиуса-вектора $\boldsymbol{R}$, идущего в центр масс системы, и три составляющих вектора $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Тогда лагранжиан этой системы будет иметь вид

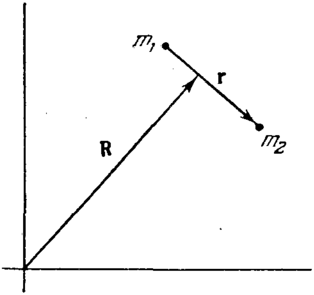

Рис. 19. Координаты системы в задаче о двух телах.

$$L = T(\dot{\boldsymbol{R}},\ \dot{\boldsymbol{r}}) - V(\boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}},\ \ldots). \quad (3.1)$$

Кинетическая энергия этих точек может быть представлена в виде суммы кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии движения системы относительно центра масс. Таким образом, будем иметь

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2 + T',$$

где

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2'^2,$$

а $\boldsymbol{r}_1'$ и $\boldsymbol{r}_2'$ — векторы, идущие к точкам 1 и 2 из их центра масс. Они определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1' &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}, \\ \boldsymbol{r}_2' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Подставляя правые части формул (3.2) в выражение для T', получаем

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\boldsymbol{r}}^2.$$

Лагранжиан (3.1) тогда принимает вид

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \ldots). \tag{3.3}$$

Теперь можно видеть, что три координаты $\boldsymbol{R}$ являются циклическими, и следовательно, центр масс этих точек либо будет находиться в покое, либо двигаться равномерно. Что касается уравнений движения, определяющих вектор $\boldsymbol{r}$, то ни одно из них не будет содержать составляющих вектора $\boldsymbol{R}$ или $\dot{\boldsymbol{R}}$. Поэтому процесс интегрирования будет здесь особенно простым, и во всех проводимых ниже рассуждениях можно будет опустить первый член лагранжиана. Оставшаяся часть будет тогда такой, как будто мы имеем дело с неподвижным центром силы и с одной движущейся точкой, радиус-вектор которой относительно этого центра равен $\boldsymbol{r}$, а масса равна

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3.4}$$

(μ называют *приведённой массой*). Следовательно, задачу о движении точек 1 и 2 относительно их центра масс всегда можно свести к эквивалентной задаче для одной точки.

Соотношение (3.4) часто записывают в виде

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{3.5}$$

§ 3.2. Уравнения движения и первые интегралы. Мы ограничимся случаем строго центральной силы, когда потенциал V является функцией только r, и поэтому сила взаимодействия направлена вдоль $\boldsymbol{r}$. Из предыдущего следует, что нам нужно решить задачу о движении точки массы m относительно неподвижного центра силы, который мы будем считать совпадающим с началом координат. Так как потенциальная энергия зависит в нашем случае только от расстояния r, то мы имеем дело со случаем сферической симметрии, при которой допустим произвольный поворот около любой оси. Поэтому любая угловая координата, характеризующая вращение около неподвижной оси, должна быть циклической. Симметрия рассматриваемой системы значительно упрощает её исследование. Прежде всего, из сферической симметрии вытекает, что вектор кинетического момента

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

будет в нашем случае постоянным. Отсюда следует, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ будет всё время перпендикулярным к фиксированному направлению вектора $\boldsymbol{L}$, что возможно только тогда, когда вектор $\boldsymbol{r}$ всё время лежит в неподвижной плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{L}$. Следует, однако, заметить, что это утверждение теряет смысл, если $\boldsymbol{L}$ равно нулю. Но ясно, что в этом случае мы будем иметь дело с движением вдоль прямой, проходящей через центр силы. Действительно, из условия $\boldsymbol{L} = 0$ следует, что вектор $\boldsymbol{r}$ параллелен $\dot{\boldsymbol{r}}$, а это возможно только в случае прямолинейного движения *). Таким образом, движение под действием центральной силы всегда является плоским.

Движение точки описывается тремя координатами; в сферических полярных координатах ими являются полярный радиус r, азимутальный угол θ и угол ψ между полярным радиусом и осью z. Если направить ось z вдоль вектора $\boldsymbol{L}$, то движение будет происходить в плоскости, перпендикулярной к этой оси; при этом координата ψ будет иметь постоянное значение $\pi/2$ и может быть исключена из последующего рассмотрения. Постоянство вектора кинетического момента даёт три независимые константы движения (соответствующие трём составляющим этого вектора). Две из них характеризуют постоянное *направление* вектора кинетического момента и уже были использованы нами при сведении задачи с тремя степенями свободы к задаче с двумя степенями свободы. Третья константа, равная $|\boldsymbol{L}|$, пока ещё нами не учтена и появится позже.

Лагранжиан рассматриваемой системы, выраженный теперь в плоских полярных координатах, имеет вид

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \tag{3.6}$$

Как и следовало ожидать, координата θ является циклической, и соответствующий ей обобщенный импульс представляет собой кинетический момент системы, равный

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

*) Формально это следует из равенства

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{n}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{n}_\theta,$$

которое показывает, что если $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = 0$, то $\dot{\theta} = 0$.

Поэтому одно из двух уравнений движения запишется в виде

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \tag{3.7}$$

Отсюда непосредственно получается первый интеграл

$$mr^2\dot{\theta} = l, \tag{3.8}$$

где l — константа, равная величине кинетического момента. Из уравнения (3.7) следует также, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0. \tag{3.9}$$

Коэффициент $^1/_2$ мы ввели сюда потому, что величина $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ представляет собой *секториальную скорость* точки, т. е. площадь, описываемую её радиусом-вектором в единицу времени. Такая интерпретация величины $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ становится ясной из рис. 20, из которого видно, что дифференциал площади, описываемой радиусом-вектором точки за время dt, равен

$$dA = \frac{1}{2}r(r\,d\theta),$$

откуда

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

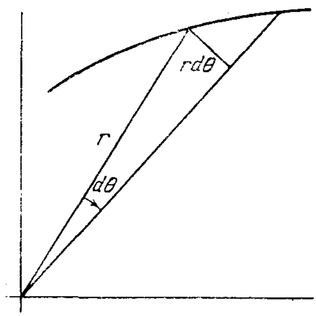

Рис. 20. Площадь, описываемая радиусом-вектором за время dt.

Следовательно, постоянство кинетического момента эквивалентно постоянству секториальной скорости. Таким образом, мы доказали хорошо известный второй закон Кеплера: радиус-вектор планеты описывает равные площади за равные промежутки времени. Следует, однако, подчеркнуть, что постоянство секториальной скорости имеет место при действии любой центральной силы, а не только силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Второе уравнение Лагранжа относится к координате r и имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \tag{3.10}$$

Обозначая радиальную составляющую $-\frac{\partial V}{\partial r}$ через $f(r)$, мы можем уравнение (3.10) переписать в виде

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r). \tag{3.11}$$

Используя первый интеграл (3.8) и исключая из уравнения (3.11) $\dot{\theta}$, мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно r

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \tag{3.12}$$

Существует ещё один первый интеграл, а именно интеграл энергии (так как система консервативна). На основании общей теоремы о сохранении энергии мы можем непосредственно установить, что постоянной движения является величина

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r), \tag{3.13}$$

где E — полная энергия системы. Этот первый интеграл может быть получен и другим путём — непосредственно из уравнений движения (3.7) и (3.12). Запишем для этого уравнение (3.12) в виде

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right). \tag{3.14}$$

Умножая это равенство на $\dot{r}$, мы в левой его части получаем:

$$m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2\right).$$

Правую часть этого равенства тоже можно представить в виде полной производной по времени, так как если $g(r)$ есть некоторая функция r, то $\frac{dg(r)}{dt}$ равно

$$\frac{d}{dt} g(r) = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{dr}{dt}.$$

Следовательно, уравнение (3.14) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V\right) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V = \text{const}. \tag{3.15}$$

Равенство (3.15) выражает постоянство полной энергии системы, так как средний член этого равенства можно с помощью уравнения (3.8) переписать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2} m^2r^4\dot{\theta}^2 = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2},$$

после чего уравнение (3.15) переходит в уравнение (3.13).

Рассмотренные первые интегралы представляют две квадратуры, необходимые для решения задачи. Так как у нас имеются две переменные r и θ, то для решения уравнений движения нам нужны в общей сложности четыре интеграции. В результате двух из них мы вместо уравнений Лагранжа получили два уравнения первого порядка: (3.8) и (3.15). Две другие интеграции могут быть произведены (формально) разными путями. Наиболее простая процедура, по-видимому, состоит в интегрировании уравнения (3.15). Решая его относительно $\dot{r}$, находим

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}, \tag{3.16}$$

или

$$dt=\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}}. \tag{3.17}$$

Пусть при $t=0$ полярный радиус r имеет значение r_0. Тогда правую часть этого равенства нужно интегрировать от r_0 до r:

$$t=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}}. \tag{3.18}$$

Таким образом, мы получили уравнение, дающее t как функцию r и констант интегрирования E, l и r_0. Разрешив это уравнение относительно r, мы сможем получить r как функцию t и тех же констант. После того как зависимость r от t найдена, можно непосредственно получить функцию $\theta=\theta(t)$ из уравнения (3.8), которое можно записать в виде

$$d\theta=\frac{l\,dt}{mr^2}. \tag{3.19}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\theta=l\int\limits_0^t\frac{dt}{mr^2(t)}+\theta_0, \tag{3.20}$$

где θ_0 — начальное значение θ. Уравнения (3.18) и (3.20) представляют результат двух интеграций, которые нам оставалось проделать. Таким образом, наша задача сведена формально к квадратурам. Полученные формулы содержат четыре постоянные интегрирования: E, l, r_0, θ_0. Однако — это не единственные постоянные, которые можно использовать для характеристики данного движения. Мы могли бы с тем же основанием взять в качестве таких постоянных r_0, θ_0, $\dot{r}_0$, $\dot{\theta}_0$, так как величины E и l можно, конечно, выразить через них. Однако система постоянных, содержащая энергию и кинетический момент, является во многих приложениях наиболее естественной. В квантовой механике, например, теряют силу такие постоянные, как начальные значения величин r и θ или $\dot{r}$ и $\dot{\theta}$, однако там можно ещё говорить об энергии системы или об её кинетическом моменте. Одно из существенных различий между классической и квантовой механикой состоит в закономерностях для величин E и l в этих теориях. Поэтому при переходе к квантовой теории важно, чтобы классическое описание системы давалось через её энергию и кинетический момент.

§ 3.3. Эквивалентная одномерная задача и классификация орбит. Хотя формально наша задача и решена, однако практически интегралы (3.18) и (3.20) обычно не выражаются в элементарных функциях, и поэтому в каждом отдельном случае часто оказывается удобным производить интегрирование каким-либо другим способом. Но, прежде чем переходить к решению этой задачи при тех или иных законах изменения силы, мы выясним, что́ можно сказать об исследуемом движении вообще, не требуя точного решения, а пользуясь лишь уравнениями движения и теоремами о сохранении.

Прежде всего заметим, что если энергия точки и её кинетический момент известны, то величина и направление её скорости могут быть выражены непосредственно через r. Действительно, из закона о сохранении энергии

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + V(r)$$

сразу получаем

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)]}, \tag{3.21}$$

что даёт нам величину вектора скорости. С другой стороны, радиальная скорость этой точки уже была нами найдена — она определяется формулой (3.16). Но в таком случае мы можем найти и направление скорости, так как для этого достаточно знать её величину и радиальную составляющую *).

Эти результаты, а также многие другие можно получить другим путём, если рассмотреть эквивалентную одномерную задачу. Уравнение (3.12) содержит только величину r и её производные. Поэтому его можно трактовать как уравнение воображаемого одномерного движения, если считать массу движущейся точки равной m, а действующую на неё силу равной

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3}. \tag{3.22}$$

*) Можно поступить и иначе. Из теоремы о сохранении кинетического момента мы можем найти угловую скорость $\dot{\theta}$, что вместе с $\dot{r}$ даёт нам величину и направление $\dot{\mathbf{r}}$.

Смысл добавочного члена l^2/mr^3 становится ясным, если записать его в виде

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{mv_\theta^2}{r},$$

что представляет собой обычную центробежную силу. Соотношение (3.22) можно получить также из закона о сохранении энергии. Для этого надо обратиться к уравнению (3.15), согласно которому рассматриваемое одномерное движение есть движение с потенциальной энергией

$$V' = V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}. \tag{3.22'}$$

Тогда будем иметь

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3},$$

что согласуется с формулой (3.22). Таким образом, закон о сохранении энергии (3.15) можно записать в виде

$$E = V' + \frac{1}{2}m\dot{r}^2. \tag{3.15'}$$

В качестве иллюстрации этого метода рассмотрим график функции $V'(r)$ для случая, когда сила f является притягивающей и изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Такая сила выражается формулой

$$f = -\frac{k}{r^2}$$

(при $k > 0$ знак минус означает, что сила направлена к центру притяжения). Соответствующая потенциальная энергия будет равна

$$V = -\frac{k}{r}.$$

Фиктивный потенциал V' будет тогда равен

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

График зависимости V' от r показан на рис. 21, где пунктирными линиями показаны функции $-\frac{k}{r}$ и $+\frac{l^2}{2mr^2}$, а сплошной линией — их сумма V'.

Рассмотрим теперь движение точки, обладающей энергией E_1 (рис. 21 и 22). Ясно, что эта точка никогда не сможет приблизиться к центру силы более, чем на r_1 (рис. 22), так как при $r < r_1$ величина V' была бы больше E_1, и тогда согласно выражению (3.15') мы получили бы отрицательную кинетическую энергию, т. е. мнимую скорость. С другой стороны, здесь не существует верхнего предела для возможных значений r, и поэтому орбита этой точки не будет замкнутой. Придя из бесконечности, она ударяется об «отталкивающий центробежный барьер» и уходит обратно в бесконечность (рис. 23). Расстояние между линиями E и V' равно $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$, т. е. пропорционально квадрату радиальной скорости, и поэтому обращается в нуль в точке, где r имеет максимум или минимум. В то же

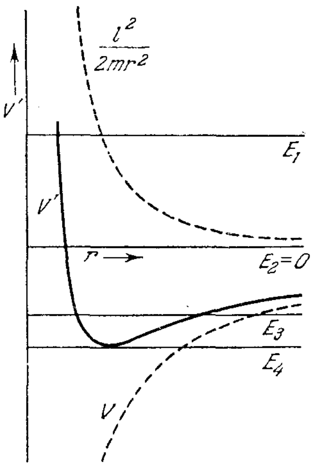

Рис. 21. Эквивалентный одномерный потенциал притягивающей силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

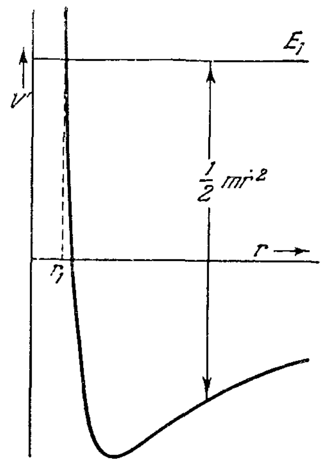

Рис. 22. Эквивалентный одномерный потенциал силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, при $E = E_1 > 0$. В этом случае движение точки начинается в бесконечности и заканчивается в бесконечности.

время расстояние между линиями E и V на графике 21 представляет кинетическую энергию $\frac{1}{2}mv^2$, соответствующую данному значению r. Следовательно, расстояние между кривыми V и V' равно $\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$. Поэтому при заданных значениях кинетической энергии и кинетического момента рассматриваемые кривые определяют скорость точки и её составляющие для любого расстояния r. Этих данных достаточно, чтобы получить приближённое представление об орбите точки.

При энергии $E_2 = 0$ (см. рис. 21) имеет место аналогичная приближённая картина для орбиты рассматриваемой точки. Но для любой меньшей энергии, такой, например, как E_3 на рис. 24, дело уже обстоит иначе. На этот раз радиус-вектор r будет иметь не только минимальное значение r_1, но и максимальное значение r_2, которого не было в случае положительной энергии. Поэтому рассматриваемое движение будет ограниченным и радиус-вектор r здесь будет иметь два крайних значения: r_1 и r_2, известных под названием *апсидальных расстояний*. Отсюда, однако, не следует, что орбиты этих движений замкнуты. Можно лишь утверждать, что они ограничены и лежат между окружностями радиусов r_1 и r_2, касаясь их в своих крайних точках (рис. 25).

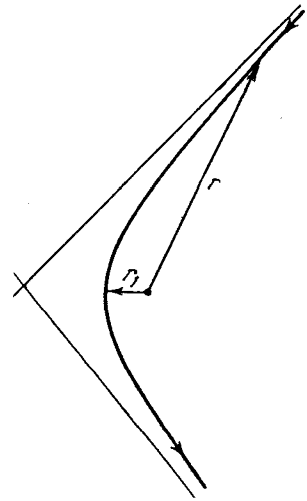

Рис. 23. Орбита точки, эквивалентный одномерный потенциал которой изображён на рис. 22.

Если энергия E будет равна минимуму фиктивного потенциала (энергия E_4 на рис. 26), то r_1 будет равно r_2, и движение будет возможным только при одном значении r. Скорость $\dot{r}$ будет равна нулю, и орбита будет представлять собой окружность. Вспоминая, что «эффективная сила» f' равна тангенсу угла наклона кривой $V'(r)$, взятому с обратным знаком, заключаем, что в данном случае f' будет равно нулю, т. е. будет иметь место равенство

$$-f(r)=\frac{l^2}{mr^3}=mr\dot{\theta}^2.$$

Таким образом, мы получили обычное элементарное условие для круговой орбиты, согласно которому действующая сила должна уравновешиваться «силой инерции» от центростремительного ускорения *).

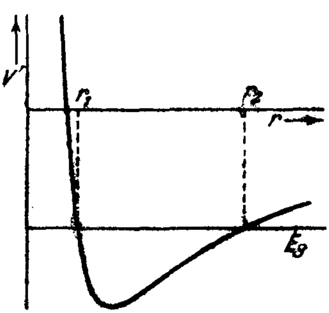

Рис. 24. Эквивалентный одномерный потенциал силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, при $E=E_3<0$. В этом случае движение точки будет ограниченным.

Следует подчеркнуть, что все наши рассуждения о характере орбит при различных значениях E справедливы для любого значения кинетического момента. Изменение величины l вызовет лишь количественное изменение кривой $V'(r)$, но не повлияет на общую классификацию типов орбит.

Впоследствии мы увидим, что в рассмотренном нами случае притягивающей силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, орбита E_1 представляет гиперболу, орбита E_2 — параболу и орбита E_3 — эллипс. При других силах орбиты могут иметь более сложный

*) Случай $E<E_4$ является физически нереальным, так как при этом $\dot{r}^2$ должно быть отрицательным и, следовательно, $\dot{r}$ — мнимым.

характер. Однако качественная сторона проведённого сейчас исследования орбит (ограниченных, неограниченных и круговых) сохраняется для любого притягивающего потенциала, удовлетворяющего двум следующим требованиям: 1) при $r \to \infty$ он должен уменьшаться медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$; 2) при $r \to 0$ он должен возрастать медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$.

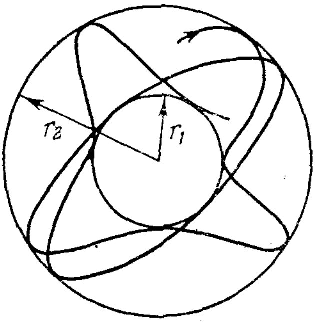

Рис. 25. Пример ограниченной орбиты.

Первое из этих требований обеспечивает преобладание потенциала над центробежным членом при больших r, а второе — преобладание центробежного члена над потенциалом при малых r.

Если потенциал не удовлетворяет этим требованиям, то качественная картина движения изменится, однако для общей характеристики орбит всё ещё можно будет пользоваться методом эквивалентного потенциала. Пусть, например, мы имеем притягивающий потенциал

$$V(r) = -\frac{a}{r^3}$$

$\left(\text{т. е. } f = -\frac{3a}{r^4}\right)$. Диаграмма энергии, соответствующая этому случаю, изображена на рис. 27. Для энергии E здесь возможны два вида движения, зависящих от начального значения r. Если r_0 будет меньше чем r_1, то движение будет ограниченным, и r всё время будет оставаться меньше, чем r_1, так что в конце концов точка может пройти через центр силы. Если же r будет в начале движения больше, чем r_2, то оно будет и всё время больше, чем r_2. Движение будет тогда неограниченным, и точка никогда не сможет попасть внутрь «потенциального отверстия». Начальное условие $r_1 < r_0 < r_2$ является здесь физически невозможным.

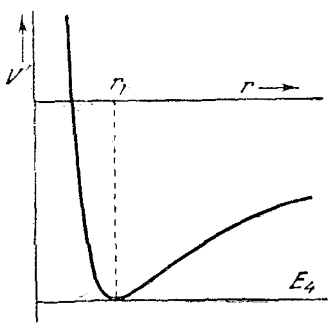

Рис. 26. Эквивалентный одномерный потенциал силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, при $E = E_4$. В этом случае точка будет двигаться по круговой орбите.

Другой интересный пример даёт нам линейно изменяющаяся восстанавливающая сила (гармоническое колебание). В этом случае

$$f = -kr \quad \text{и} \quad V = \frac{1}{2} kr^2.$$

Если кинетический момент l равен нулю, то рассматриваемое движение будет прямолинейным, и тогда $V' = V$. Этот случай представлен на рис. 28. Для любой положительной энергии движение является ограниченным и, как известно, представляет собой простое гармоническое колебание. Если $l \neq 0$, то мы получим картину, изображённую на рис. 29. При всех физически возможных значениях энергии это движение будет ограниченным и не будет проходить через центр силы. Легко видеть, что орбитой этого движения является эллипс, так как при $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{r}$ составляющие f_x и f_y равны соответственно

$$f_x = -kx, \qquad f_y = -ky.$$

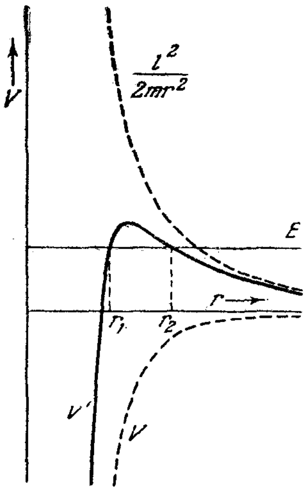

Рис. 27. Эквивалентный одномерный потенциал для притягивающей силы, обратно пропорциональной четвёртой степени расстояния.

Отсюда следует, что рассматриваемое движение является суперпозицией двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты, что в общем случае приводит к эллиптической орбите. Известным примером такого движения служат малые колебания сферического маятника. Заметим, между прочим, что обычные фигуры Лиссажу получаются в результате сложения двух взаимно перпендикулярных синусоидальных колебаний, частоты которых относятся, как целые числа. Следовательно, движение под действием центральной силы $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{r}$ даёт нам простейшую из фигур Лиссажу.

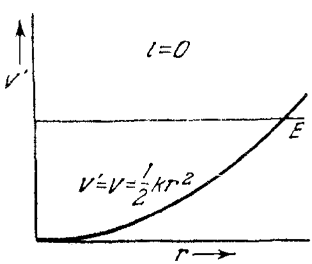

Рис. 28.

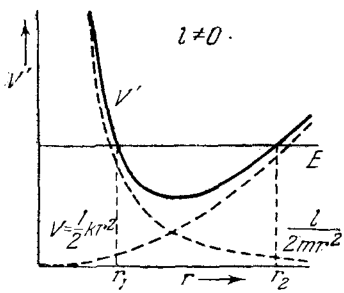

Рис. 29.

§ 3.4. Теорема о вириале. Мы сейчас установим ещё одно свойство движения под действием центральной силы. Его можно получить как частный случай весьма общей теоремы, справедливой для широкого круга различных систем — так называемой *теоремы* *о вириале*. От ранее рассмотренных теорем она отличается тем, что имеет *статистический* характер, т. е. рассматривает различные механические величины, осреднённые по времени.

Рассмотрим произвольную систему материальных точек, определяемых векторами $\boldsymbol{r}_i$ и находящихся под действием сил $\boldsymbol{F}_i$ (включая реакции связей). Уравнения движения этой системы имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{F}_i. \tag{1.1}$$

Рассмотрим величину

$$G = \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{r}_i,$$

где суммирование производится по всем точкам системы. Её полная производная по времени равна

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{p}_i + \sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \boldsymbol{r}_i, \tag{3.23}$$

причём первый член этой суммы можно записать в виде

$$\sum_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T,$$

а второй — в виде

$$\sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i$$

[на основании (1.1)]. Тогда равенство (3.23) примет вид

$$\frac{d}{dt} \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = 2T + \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i. \tag{3.24}$$

Для того чтобы перейти к средним значениям фигурирующих здесь величин, нужно проинтегрировать это равенство по времени от нуля до некоторого τ и затем разделить этот интеграл на τ:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt}\, dt \equiv \overline{\frac{dG}{dt}} = 2\overline{T} + \overline{\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i},$$

или

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i} = \frac{1}{\tau}[G(\tau) - G(0)]. \tag{3.25}$$

Если движение этой системы является периодическим, т. е. значения координат всех её точек повторяются через определённый промежуток времени, то, выбрав τ равным периоду этого движения, мы сделаем правую часть равенства (3.25) равной нулю. Аналогичный вывод можно сделать и в случае непериодического движения, если только координаты и скорости всех точек системы остаются ограниченными.

В этом случае величина $|G|$ имеет верхнюю границу, и, выбрав τ достаточно большим, можно сделать правую часть равенства (3.25) сколь угодно малой. В каждом из этих случаев мы будем иметь

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i}. \tag{3.26}$$

Правая часть этого равенства называется *вириалом Клаузиуса*, а само равенство (3.26) выражает так называемую *теорему о вириале*.

В указанном виде эта теорема очень полезна в кинетической теории газов. Так, например, из неё можно очень просто вывести закон Бойля для идеальных газов (см. Lindsay, *Physical Statistics*, стр. 70). Практически нам часто бывает нужно уравнение состояния для *неидеальных газов*. В этом случае силы $\boldsymbol{F}_i$ будут состоять не только из реакций связей, заставляющих газ оставаться внутри сосуда, но также из сил взаимодействия между молекулами.

Можно показать, что если силы $\boldsymbol{F}_i$ будут складываться из движущих сил $\boldsymbol{F}_i'$ и сил трения $\boldsymbol{f}_i$, пропорциональных скоростям точек, то вириал системы будет зависеть только от сил $\boldsymbol{F}_i'$. Силы $\boldsymbol{f}_i$ в этом случае не оказывают на него никакого влияния. При этом, конечно, предполагается, что движение системы не прекращается вследствие трения, т. е. что постоянно поступает энергия, поддерживающая движение системы. В противном случае *все* средние значения будут при неограниченном росте τ стремиться к нулю.

Если силы, действующие на систему, имеют потенциал, то теорема о вириале принимает вид

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum_i \nabla V \cdot \boldsymbol{r}_i}. \tag{3.27}$$

Для отдельной материальной точки, движущейся под действием центральной силы, равенство (3.27) даёт

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial V}{\partial r} r}. \tag{3.28}$$

Если, например, V есть степенная функция r

$$V = ar^{n+1},$$

где показатель степени выбран так, чтобы сила F была пропорциональной r^n, то

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V.$$

Равенство (3.28) примет вид

$$\overline{T} = \frac{n+1}{2}\overline{V}. \tag{3.29}$$

В частном случае, когда сила F обратно пропорциональна квадрату расстояния, показатель n будет равен -2, и теорема о вириале принимает хорошо известную форму

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{V}. \tag{3.30}$$

§ 3.5. Дифференциальное уравнение орбиты и интегрируемые степенные потенциалы. Переходя к рассмотрению различных специальных случаев центральной силы, мы несколько изменим постановку нашей задачи. До сих пор мы считали, что решение задачи означает нахождение r и θ как функций времени при заданных постоянных интегрирования E, l и др. Однако чаще всего нам приходится иметь дело не с этими функциями, а с уравнением орбиты, т. е. с такой зависимостью r от θ, из которой исключён параметр t. В тех случаях, когда сила является центральной, это исключение выполняется особенно легко, так как уравнения движения содержат тогда t только в качестве переменной дифференцирования. Действительно, уравнение движения (3.8) даёт нам в этом случае соотношение

$$l\,dt=mr^2\,d\theta, \tag{3.31}$$

из которого получается соотношение, связывающее производные по t и по θ:

$$\frac{d}{dt}=\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}. \tag{3.32}$$

Эти соотношения можно использовать для преобразования уравнения движения (3.12) в дифференциальное уравнение орбиты. Кроме того, ими можно воспользоваться для интегрирования уравнений движения, заданных в форме (3.17), что даст нам непосредственно уравнение орбиты. Сначала мы пойдём по первому пути.

Из соотношения (3.32) видно, что вторая производная по t равна

$$\frac{d^2}{dt^2}=\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\right),$$

и следовательно, уравнение Лагранжа (3.12) принимает вид

$$\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{l^2}{mr^3}=f(r). \tag{3.33}$$

Чтобы упростить уравнение (3.33), воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$$

и, перейдя таким путём к новой переменной $u=\frac{1}{r}$, получим

$$\frac{l^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-f(u). \tag{3.34}$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение, определяющее орбиту в случае, когда известен закон изменения силы f. Если же уравнение орбиты нам известно, т. е. если дано r как функция θ, то с помощью этого уравнения мы можем найти закон изменения силы $f(r)$.

Исходя из уравнения (3.34), можно сделать некоторые общие заключения о характере орбиты. Можно показать, например, что она симметрична относительно точек, в которых радиус r имеет максимум или минимум. Для того чтобы сделать это, мы должны показать, что орбита не меняется при отражении от полярного радиуса такой точки. Выберем для этого систему координат таким образом, чтобы полярная ось проходила через одну из этих точек. Тогда угол θ будет здесь равен нулю и указанное отражение можно будет выполнить посредством замены θ на $-\theta$. Дифференциальное уравнение орбиты (3.34), очевидно, инвариантно по отношению к такому преобразованию. Кроме того, начальные условия

$$u = u(0), \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 = 0 \quad \text{для} \quad \theta = 0$$

также не меняются при указанном преобразовании. Следовательно, уравнение орбиты не изменяется при замене θ на $-\theta$, что и требовалось доказать.

Таким образом, *орбита симметрична относительно апсидальных векторов*. Отсюда следует, что, зная часть орбиты между двумя такими векторами, мы можем построить всю орбиту. Для этого достаточно отразить указанный участок относительно одного из апсидальных векторов и получить таким путём соседний участок орбиты. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока не будет получена вся орбита, как это показано на рис. 30.

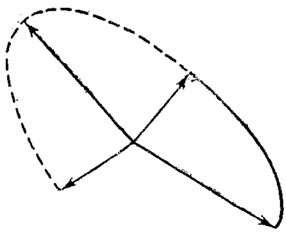

Рис. 30. Построение орбиты посредством последовательных отражений её участков от апсидальных векторов.

Для любого конкретного закона изменения силы уравнение орбиты получается посредством интегрирования дифференциального уравнения (3.34). Однако незачем проделывать эту процедуру во всех подробностях, так как бо́льшая часть работы была уже нами проделана при рассмотрении уравнения движения (3.12). Поэтому сейчас остаётся лишь исключить с помощью (3.31) переменную t из уравнения (3.17). В результате получим

$$d\theta = \frac{l\,dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right]}}. \tag{3.35}$$

После незначительных преобразований этого равенства и интегрирования в пределах от r_0 до r находим

$$\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0, \tag{3.36}$$

или, переходя к переменной $u = \frac{1}{r}$:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}}. \tag{3.37}$$

Как и в случае уравнений движения (3.18), (3.20), формула (3.37) даёт нам формальное решение задачи. Однако практически это решение удаётся получить не всегда, так как интеграл (3.37) часто не может быть выражен в элементарных функциях. Фактически этот интеграл был исследован лишь для некоторых конкретных законов изменения силы, из которых наиболее важным является степенной закон. В этом случае

$$V = ar^{n+1}, \tag{3.38}$$

а сила f изменяется пропорционально n-й степени r *).

При потенциале (3.38) интеграл (3.37) получается равным

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2}u^{-n-1} - u^2}}. \tag{3.39}$$

Однако и теперь он выражается в элементарных функциях лишь при определённых значениях n. Если выражение, стоящее под радикалом, будет полиномом не выше второй степени и, следовательно, знаменатель подынтегрального выражения будет иметь вид $\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}$, то интегрирование можно будет провести в круговых функциях. Это ограничение эквивалентно требованию, чтобы

$$-n - 1 = 0,\ 1,\ 2.$$

Если исключить случай $n = -1$, то мы получим таким путём два значения:

$$n = -2 \quad \text{и} \quad n = -3,$$

*) Случай $n = -1$ из нашего рассмотрения исключается, так как потенциал (3.38) получается тогда постоянным, что означает отсутствие силы. Если же рассматривать n как показатель степени в функции $f(r)$, то всё равно этот случай нужно будет исключить, так как сила, изменяющаяся пропорционально r^{-1}, соответствует не степенному потенциалу, а логарифмическому. Такой потенциал скорее характерен не для притяжения к точке, а для притяжения к *линейному* источнику силы.

соответствующих случаю изменения силы обратно пропорционально квадрату или кубу расстояния.

Другой легко интегрируемый случай получается при $n=1$, т. е. при линейном законе изменения силы. В этом случае уравнение (3.39) можно записать в виде

$$\theta=\theta_0-\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2}-\frac{2ma}{l^2}\frac{1}{u^2}-u^2}}, \tag{3.39'}$$

что после подстановки

$$u^2=x, \quad du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

в интеграл правой части уравнения (3.39′) даёт

$$\theta=\theta_0-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2}x-\frac{2ma}{l^2}-x^2}}, \tag{3.40}$$

т. е. мы опять получаем интеграл рассмотренного типа.

Таким образом, мы можем получить решение в элементарных функциях в трёх следующих случаях:

$$n=1,\ -2,\ -3.$$

Это не означает, однако, что при других показателях степени интеграл (3.39) не выражается в элементарных функциях; это возможно и при других n, но в этом случае нам придётся иметь дело с менее известными функциями. Например, возможны такие значения n, при которых интеграл (3.39) оказывается *эллиптическим* и решение выражается через *эллиптические функции.*

Согласно определению эллиптический интеграл равен

$$\int R(x,\ \omega)\,dx,$$

где R — любая рациональная функция x и ω, а ω равно

$$\omega=\sqrt{\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\eta}.$$

При этом α и β не могут, конечно, одновременно равняться нулю, так как тогда можно будет выразить этот интеграл через круговые функции. Можно показать (см. Whittaker and Watson, Modern Analysis, 4-е изд., стр. 512), что любой такой интеграл может быть выражен через круговые функции и эллиптические интегралы Лежандра первого, второго и третьего рода, для которых имеются полные и подробные таблицы. Свойствам этих интегралов и их связи с эллиптическими функциями посвящена обширная литература, где этот вопрос изложен исчерпывающим образом. Эти функции не требуют для своего применения какого-нибудь более тонкого математического аппарата, чем круговые функции, хотя они и менее обычны. Из определения эллиптических интегралов следует, что интеграл в выражении (3.39) можно выразить через эллиптические функции при

$$n = -4, \ -5.$$

Мы можем попытаться представить интеграл в другой форме, тоже приводящей к эллиптическому интегралу. Умножим для этого числитель и знаменатель подынтегрального выражения на u^ρ, где ρ — некоторый целый показатель степени. Тогда интеграл примет вид

$$\int \frac{u^\rho \, du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} u^{2\rho} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1+2\rho} - u^{2(\rho+1)}}},$$

где выражение, стоящее под радикалом, будет полиномом выше четвёртого порядка, за исключением случая $\rho = 1$. Следовательно, интеграл не будет сложнее эллиптического интеграла лишь при

$$-n-1+2 = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4$$

или

$$n = +1, \ 0, \ -1, \ -2, \ -3.$$

Но при $n = +1, \ -2, \ -3$ этот интеграл выражается через круговые функции, а случай $n = -1$ мы исключаем. Следовательно, только при $n = 0$ эта процедура приводит к эллиптическим функциям.

Кроме того, интеграл эллиптического типа можно получить с помощью подстановки $u^2 = x$. Интеграл (3.39) примет тогда вид

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} x - \frac{2ma}{l^2} x^{\frac{-n+1}{2}} - x^2}}$$

и приведётся к эллиптическому при $(-n+1)/2$, равном 3 или 4, что даёт нам ещё два показателя степени:

$$n = -5, \ -7.$$

Наконец, мы опять можем умножить числитель и знаменатель найденного интеграла на x, и условие получения эллиптического или более простого интеграла будет иметь вид

$$\frac{-n+1}{1} + 2 = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4$$

или

$$n = +5, \ +3, \ +1, \ -1, \ -3.$$

Таким образом, мы в общей сложности получили следующие шесть показателей степени, приводящих к эллиптическим функциям:

$$n = +5, \ +3, \ 0, \ -4, \ -5, \ -7.$$

Хотя этими значениями исчерпываются все показатели, получаемые рассмотренным путём, однако можно показать, что при соответствующих преобразованиях некоторые дробные показатели также приводят к эллиптическим интегралам.

§ 3.6. Сила, изменяющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния. Законы Кеплера. Сила, изменяющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния, является одной из самых важных центральных сил и поэтому заслуживает подробного рассмотрения. Эта сила и её потенциал выражаются следующими функциями от r:

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad V = -\frac{k}{r}. \tag{3.41}$$

Существует несколько путей интегрирования уравнения орбиты в рассматриваемом случае. Проще всего это делается с помощью подстановки значений (3.41) в дифференциальное уравнение орбиты (3.34):

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-mf(u)}{l^2u^2} = \frac{mk}{l^2}. \tag{3.42}$$

Производя замену переменного посредством подстановки $y = u - \frac{mk}{l^2}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0.$$

Решение этого уравнения имеет, как известно, вид

$$y = b\cos(\theta - \theta'),$$

где b и θ' — постоянные интегрирования. Возвращаясь к переменной r, получаем это решение в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}[1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta')], \tag{3.43}$$

где

$$\varepsilon = b\frac{l^2}{mk}.$$

Уравнение орбиты можно получить и с помощью формального интегрирования уравнения (3.39). Хотя эта процедура длиннее непосредственного интегрирования дифференциального уравнения (3.42), однако она имеет то преимущество, что важная постоянная интегрирования ε автоматически получается при этом выраженной через энергию E

и кинетический момент системы l. Перепишем равенство (3.39) в виде

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}, \tag{3.44}$$

где написанный интеграл является неопределённым, а θ' представляет постоянную интегрирования, определяемую начальными условиями, которая не обязательно должна быть равна начальному углу θ_0 при $t = 0$. Рассматриваемый интеграл является интегралом стандартного типа *):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos - \frac{b + 2cx}{\sqrt{q}}, \tag{3.45}$$

где

$$q = b^2 - 4ac.$$

Применяя эту формулу к равенству (3.44), мы должны положить:

$$a = \frac{2mE}{l^2}, \quad b = \frac{2mk}{l^2}, \quad c = -1,$$

и, следовательно, дискриминант q равен

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right).$$

После этих подстановок уравнение (3.44) примет вид

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\frac{l^2u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}.$$

Разрешив его относительно $u \equiv \frac{1}{r}$, мы получим уравнение орбиты в следующем окончательном виде:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta')\right], \tag{3.46}$$

что согласуется с выражением (3.43), но ε выражено здесь через E и l. Согласно уравнению (3.46) постоянную интегрирования θ' в этом уравнении можно рассматривать как один из полярных углов орбиты. Заметим, что в уравнение орбиты входят лишь три постоянных интегрирования из четырёх, что является характерной особенностью уравнения орбиты. Это объясняется тем, что четвёртая постоянная определяет

*) См., например, B. O. Pierce, A. Short Table of Integrals, № 161. Для того чтобы получить (3.45), нужно к результату, даваемому Пирсом, прибавить постоянную $-\pi/2$, что, конечно, допустимо, так как рассматриваемый интеграл является неопределённым.

начальное положение точки на орбите, и если нас интересует только само уравнение орбиты, то эта постоянная, очевидно, не должна фигурировать в решении. Конечно, если мы захотим закончить решение и найти r и θ как функции времени, то эту недостающую постоянную нужно будет ввести. Желая, например, воспользоваться теоремой о сохранении кинетического момента и произвести интегрирование уравнения

$$mr^2\,d\theta = l\,dt$$

с помощью (3.46), мы должны будем определить начальный угол θ_0.

Известно, что общее уравнение конического сечения, имеющего фокус в начале координат, имеет вид

$$\frac{1}{r} = C\,[1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta')], \tag{3.47}$$

где ε — эксцентриситет конического сечения. Сравнивая это уравнение с уравнением (3.46), мы видим, что рассматриваемая орбита является коническим сечением с эксцентриситетом

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}\,. \tag{3.48}$$

Тип орбиты зависит от значения ε и определяется следующей таблицей:

$\varepsilon > 1$,	$E > 0$:	гипербола,
$\varepsilon = 1$,	$E = 0$:	парабола,
$\varepsilon < 1$,	$E < 0$:	эллипс,
$\varepsilon = 0$,	$E = -\dfrac{mk^2}{2l^2}$:	окружность.

Эта классификация согласуется с тем качественным исследованием орбит, которое было основано на энергетической диаграмме эквивалентного одномерного потенциала V'. Правда, условие для кругового движения выглядит здесь несколько иначе, однако эквивалентность его прежнему условию можно доказать, представляя полученное равенство в виде

$$E = -\frac{k^2}{2mr^4\dot{\theta}^2}\,. \tag{3.49}$$

В случае круговой орбиты величины T и V не будут меняться со временем, и теорему о вириале можно записать в виде

$$T = -\frac{1}{2}V,$$

откуда полная энергия равна

$$E = \frac{1}{2}V = -\frac{k}{2r}\,. \tag{3.50}$$

Подставив теперь это значение E в условие (3.49), получим:

$$\frac{k}{r^2} = mr\dot{\theta}^2.$$

Это условие выражает тот факт, что сила притяжения уравновешивается центробежной силой, как и было установлено ранее в § 3.3.

Можно показать, что если орбита является эллиптической, то большая полуось зависит только от её энергии, что представляет теорему, имеющую существенное значение в теории атома Бора. Докажем это. Большая полуось равна полусумме апсидальных расстояний r_1 и r_2 (рис. 24) и согласно (3.47) равна

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1}{2C(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2C(1-\varepsilon)} = \frac{1}{C}\,\frac{1}{1-\varepsilon^2}\,; \tag{3.51}$$

после подстановки постоянных орбиты из формулы (3.46) выражение для большой полуоси принимает вид

$$a = -\frac{k}{2E}, \tag{3.52}$$

что, как легко видеть, согласуется с формулой (3.50) для радиуса круговых орбит.

В качестве последнего вопроса, относящегося к силам, обратно пропорциональным квадрату расстояния, мы рассмотрим задачу о вычислении периода движения по эллиптической орбите. Мы знаем, что из постоянства кинетического момента следует постоянство секториальной скорости, равной

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\,r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2m}\,. \tag{3.53}$$

Отсюда можно найти площадь орбиты A, интегрируя (3.53) за полный период τ:

$$\int_0^\tau \frac{dA}{dt}\,dt = A = \frac{l\tau}{2m}\,.$$

Но площадь эллипса равна

$$A = \pi ab,$$

причём большая полуось a определяется равенством (3.52), а малая полуось b выражается через a (по известной формуле для эксцентриситета) следующим образом:

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Из формулы (3.51) видно, что малая полуось равна

$$b = \sqrt{\frac{a}{C}} = a^{1/2}\sqrt{\frac{l^2}{mk}},$$

и период движения получается равным

$$\tau = \frac{2m}{l}\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{l^2}{mk}} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{3.54}$$

Равенство (3.54) показывает, что при заданных k и m квадрат периода пропорционален кубу большой оси. Это положение часто называют третьим законом Кеплера *). Следует, впрочем, заметить, что в действительности третий закон Кеплера формулируется несколько иначе, так как он относится к специальному случаю движения, который рассматривал Кеплер, — к движению планет в гравитационном поле Солнца. В более точной формулировке этот закон гласит: квадраты периодов обращения различных планет пропорциональны кубам больших осей их орбит. Нужно заметить, что в этой форме закон Кеплера верен лишь приближённо. Следует помнить, что задача о движении планет вокруг Солнца является задачей о движении двух тел, и поэтому величину m в (3.54) нужно заменить на приведённую массу μ, равную

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Массу m_1 в этой формуле можно считать относящейся к планете, а массу m_2 — к Солнцу. Кроме того, константу k мы должны заменить на

$$k = Gm_1 m_2, \tag{3.55}$$

что следует из закона всемирного тяготения

$$f = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Тогда равенство (3.54) примет вид:

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_2}}. \tag{3.56}$$

Таким образом, если пренебречь массой планеты по сравнению с массой Солнца, то мы получим равенство (3.56), выражающее третий закон Кеплера. Действительно, согласно этому равенству τ пропорционально $a^{3/2}$, причём коэффициент пропорциональности одинаков для всех планет. Но масса планеты не всегда является

*) Три закона Кеплера были установлены им приблизительно в 1610 г. Они явились результатом исследований, проведённых им над движением планет, и послужили основой для последующих работ Ньютона. Второй закон Кеплера утверждает, что секториальная скорость планеты является постоянной. Как отмечалось ранее, он справедлив для любой центральной силы. Однако первый закон Кеплера (о том, что каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце) и его третий закон справедливы только для тех центральных сил, которые изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния.

пренебрежимо малой величиной по сравнению с массой Солнца. Например, масса Юпитера составляет приблизительно 5% от массы Солнца. С другой стороны, третий закон Кеплера будет строго верен для орбит электронов в атоме Бора, так как μ и k одинаковы при этом для всех орбит данного атома.

§ 3.7. Рассеяние частиц в поле центральной силы. Исторически интерес к центральным силам возник из астрономических задач о движении планет. Однако нет оснований считать, что интерес к этим силам ограничивается лишь задачами такого рода. Мы уже указывали на другой пример применения теории центральных сил — задачу о движении электрона в атоме Бора. Мы сейчас рассмотрим ещё одну задачу о центральных силах, допускающую решение с позиций классической механики. Это — задача о *рассеянии* частиц в поле центральной силы. Конечно, если эти частицы имеют масштабы атома, то следует ожидать, что некоторые результаты классического исследования будут часто физически неправильными, так как квантовые эффекты в этих случаях обычно значительны. Тем не менее, имеется много классических положений, которые остаются верными и здесь и поэтому могут служить в качестве достаточно хорошего приближения.

Проблема рассеяния касается отклонения частиц под действием *центральной силы*. Мы рассмотрим однородный пучок частиц, например, электронов или α-частиц, обладающих одинаковой массой и одинаковым законом изменения энергии V в зависимости от расстояния r до центра силы. Силу эту мы будем предполагать стремящейся к нулю при $r \to \infty$. Поток частиц мы будем характеризовать его *интенсивностью* I (эту величину называют также плотностью потока), которая равна числу частиц, проходящих через единичное поперечное сечение потока в единицу времени. По мере приближения частицы к центру силы она будет притягиваться им либо отталкиваться и траектория её будет отклоняться от начальной прямой линии. Затем частица станет удаляться от этого центра, и действующая на неё сила в конце концов уменьшится настолько, что траекторию можно будет опять считать прямолинейной. В общем случае конечное направление её движения не будет совпадать с начальным, т. е. будет иметь место некоторое отклонение. *Поперечным сечением рассеяния в данном направлении* мы будем называть величину $\sigma(\Omega)$, определяемую равенством

$$\sigma(\Omega)\,d\Omega = \frac{\text{число частиц, проходящих через телесный угол } d\Omega \text{ за единицу времени}}{\text{плотность потока}}, \tag{3.57}$$

где $d\Omega$ — элементарный телесный угол в направлении Ω. Величину $\sigma(\Omega)$ часто называют также *дифференциальным поперечным сечением рассеяния.* В случае поля центральной силы должна быть полная симметрия относительно оси потока, и поэтому элементарный угол $d\Omega$ может быть записан в виде

$$d\Omega = 2\pi \sin\Theta\, d\Theta, \tag{3.58}$$

где Θ — угол между конечным и начальным направлениями движения, известный как *угол рассеяния*. Заметим, что термин «поперечное сечение» оправдывается тем, что $\sigma(\Omega)$ имеет размерность площади.

Константы траектории каждой частицы, а следовательно, и угол Ω определяются энергией и кинетическим моментом этой частицы. Последний удобно выражать через энергию и так называемый

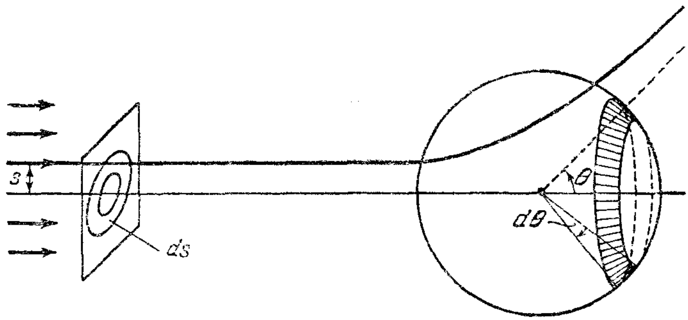

Рис. 31. Рассеяние пучка элементарных частиц под действием центральной силы.

параметр соударения s, равный расстоянию от центра силы до прямой, по которой начинает своё движение рассматриваемая частица. Если начальную скорость этой частицы обозначить через v_0, то будем иметь:

$$l = mv_0 s = s\sqrt{2mE}. \tag{3.59}$$

Величины E и s однозначно определяют угол Θ *). Поэтому число частиц, рассеиваемых в телесном угле $d\Omega$, заключённом между Θ и $\Theta + d\Theta$, должно равняться числу частиц, для которых параметр s лежит в пределах между s и $s + ds$ (значения параметра s, соответствующие углам Θ и $\Theta + d\Theta$). Таким образом, будем иметь:

$$2\pi I s\, ds = -2\pi\sigma(\Theta)\, I \sin(\Theta)\, d\Theta. \tag{3.60}$$

(Знак минус в правой части этого равенства объясняется тем, что при увеличении параметра s на частицу действует меньшая сила, в результате чего происходит уменьшение угла Θ.) Если s рассма-

*) В этом пункте классическая механика расходится с квантовой. Существенная особенность квантовой механики состоит в том, что в ней нельзя вполне определить траекторию какой-либо конкретной точки. В квантовой механике можно говорить лишь о вероятности рассеяния в том или ином направлении.

тривать как функцию энергии E и соответствующего угла Θ, то можно будет написать:

$$s = s(\Theta, E), \qquad (3.61)$$

и тогда функция $\sigma(\Theta)$ будет определяться равенством

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\frac{ds}{d\Theta}. \qquad (3.62)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим важную в историческом отношении задачу о рассеянии заряженных частиц электрическим полем неподвижного заряда (поле Кулона). Допустим, что величина этого заряда равна $-Ze$, а заряд каждой летящей частицы равен $-Z'e$. Тогда сила f будет равна

$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2},$$

т. е. будет силой отталкивания, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому мы можем воспользоваться результатами предыдущего параграфа, положив

$$k = -ZZ'e^2. \qquad (3.63)$$

Уравнение орбиты (3.46) принимает вид:

$$\frac{1}{r} = -\frac{mZZ'e^2}{l^2}(1 + \varepsilon\cos\theta), \qquad (3.64)$$

где ε равно

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZ'e^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2}\right)^2}, \qquad (3.65)$$

а θ' мы считаем равным нулю, чего всегда можно добиться соответствующим поворотом полярной оси. Уравнение (3.64), как и уравнение (3.46), определяет коническое сечение, а именно гиперболу, так как $\varepsilon > 1$. Однако в правой части этого уравнения стоит знак минус и, следовательно, допустимыми значениями θ являются лишь те, для которых

$$\cos\theta < -\frac{1}{\varepsilon} \qquad (3.66)$$

(рис. 32). Отсюда следует, что центр силы находится в данном случае во внешнем фокусе гиперболы (рис. 33), а не во внутреннем, как было в случае силы притяжения (см. рис. 23).

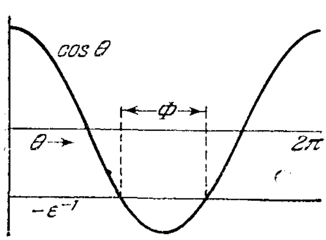

Рис. 32. Область изменения θ для рассеяния под действием отталкивающей силы Кулона.

Изменение угла θ в случае, когда частица приходит из бесконечности и, отклонившись от первоначального направления, вновь уходит в бесконечность, почти равно углу Φ между асимптотами, который в свою очередь является дополнением угла Θ до 180°. Поэтому на основании равенства (3.66) и рис. 32 будем иметь:

$$\cos\frac{\Phi}{2} = \sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\varepsilon},$$

или

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\Theta}{2} = \operatorname{cosec}^2\frac{\Theta}{2} - 1 = \varepsilon^2 - 1,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2} = \frac{2Es}{ZZ'e^2}. \tag{3.67}$$

Теперь мы легко можем найти функцию $\sigma(\Theta)$. Выразив с помощью (3.67) параметр s через E и Θ, получим:

$$s = \frac{ZZ'e^2}{2E}\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2},$$

и тогда с помощью (3.62) найдём:

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{ZZ'e^2}{2E}\right)^2 \frac{\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}}{\sin\Theta}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}\right),$$

или

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{ZZ'e^2}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}. \tag{3.68}$$

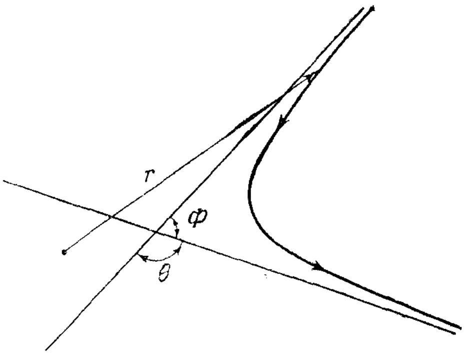

Рис. 33. Траектория частицы при рассеянии под действием отталкивающей силы Кулона. Из рисунка видна связь угла рассеяния с углом между асимптотами.

Этот результат совпадает с тем, который был в своё время получен Рёзерфордом для рассеяния α-частиц атомным ядром. Квантовая механика (без учёта релятивистских эффектов) приводит к тому же результату.

В атомной физике играет важную роль так называемое *полное поперечное сечение рассеяния*, равное

$$\sigma_t = \int_{4\pi} \sigma(\Omega)\,d\Omega = 2\pi\int_0^{\pi} \sigma(\Theta)\sin\Theta\,d\Theta.$$

Однако если мы попытаемся вычислить его, подставляя в этот интеграл значения $\sigma(\Theta)$ из выражения (3.68), то получим бесконечность. Физическую причину этого нетрудно установить. Согласно определению полного поперечного сечения рассеяния оно равно числу частиц потока единичной плотности, рассеиваемых по всем направлениям в единицу времени. Но электростатические силы являются силами дальнодействия, и поэтому область, в которой они себя проявляют, простирается до бесконечности. Вследствие этого очень малые значения Θ будут лишь у тех частиц, у которых очень велико s. Следовательно, все частицы потока, имеющего бесконечно большое поперечное сечение, будут в той или иной степени рассеиваться кулоновской силой. Именно поэтому полное поперечное сечение рассеяния получается в этом случае бесконечным. Из сказанного следует, что бесконечное значение σ_t свойственно не только полю сил Кулона, так как при классическом методе исследования этот результат будет иметь место всегда, когда рассеивающее поле отлично от нуля на всех конечных расстояниях (как бы велики они ни были)*). Поэтому только в случае поля ограниченной протяжённости, т. е. такого, в котором, начиная с некоторого расстояния, силы становятся равными нулю, полное поперечное сечение рассеяния будет конечным. Практически это имеет место в электростатическом поле атомного ядра и окружающих его электронов, которые «экранируют» ядро и эффективно компенсируют его заряд на больших расстояниях.

§ 3.8. Приведение задачи о рассеянии к лабораторной системе координат. В предыдущем параграфе мы рассматривали рассеяние частиц в поле неподвижного заряда, т. е. изучали движение одной точки. На практике, однако, в этом процессе всегда участвуют два взаимодействующих тела, например в опыте Рёзерфорда мы имеем α-частицу и атомное ядро. При этом вторая частица не является неподвижной, а перемещается в результате взаимодействия с первой. Но мы знаем, что задачу о движении двух тел, находящихся под действием центральной силы взаимного притяжения или отталкивания, можно свести к задаче о движении одного тела. Поэтому может показаться, что единственная поправка, которую нам надлежит сделать, состоит в замене массы m на приведённую массу μ. Однако в действительности вопрос этот не так прост. Дело в том, что измеряемый в лабораторных условиях угол рассеяния (мы обозначим его через ϑ) есть угол между конечным и начальным направлениями движения частицы**). В то же время угол Θ, вычисляемый по формулам соответствующей задачи для одного тела, есть угол между конечным и начальным направлением вектора, соединяющего две взаимодействующие частицы. Эти два угла будут одинаковыми только в том случае, когда в течение всего времени рассеяния вто-

---

*) Величина σ_t получается бесконечной и в случае применения к рассматриваемому полю методов квантовой механики, так как формула (3.68) остаётся здесь справедливой. Однако кулоновское поле, созданное неподвижным зарядом, является в этом отношении несколько аномальным. Оказывается, что все силы, убывающие с расстоянием быстрее, чем сила Кулона, приводят в квантовой механике к конечному значению σ_t.

**) Угол рассеяния ϑ не следует смешивать с угловой координатой θ относительного вектора $\boldsymbol{r}$, соединяющего две частицы.

рая частица остаётся неподвижной. В общем случае, однако, она находится в покое лишь в начале процесса рассеяния, а затем начинает участвовать в движении этой системы, которое совершается под влиянием сил взаимодействия данных частиц. Из рис. 34 видно, что эти углы будут иметь тогда различные значения. Эквивалентная задача о движении одного тела не даёт, таким образом, того угла рассеяния, который непосредственно измеряется в лабораторной системе координат.

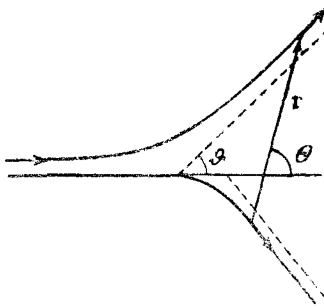

Рис. 34. Рассеяние двух частиц в лабораторной системе координат.

Однако в системе координат, движущейся вместе с центром масс рассматриваемых частиц, положение будет совершенно иным. В этой системе общее количество движения взаимодействующих частиц будет, конечно, равно нулю, т. е. эти частицы будут иметь равные, но противоположно направленные количества движения. На рис. 35 показана картина рассеяния, представляющаяся наблюдателю, движущемуся вместе с центром масс системы. До рассеяния эти частицы движутся навстречу друг к другу, а после рассеяния — друг от друга. Поэтому угол Θ между начальным и конечным направлением относительного вектора должен быть таким же, как угол рассеяния каждой частицы относительно центра масс системы. Таким образом, зависимость между углами рассеяния Θ и ϑ можно получить посредством перехода от системы координат, связанной с центром масс этих частиц, к лабораторной системе координат.

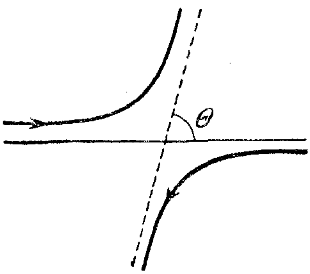

Рис. 35. Рассеяние двух частиц в системе координат, движущейся вместе с центром масс.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями, введёнными в § 3.1 этой главы:

r_1 и v_1 — радиус-вектор и скорость частицы 1 в лабораторной системе координат;

r_1' и v_1' — радиус-вектор и скорость той же частицы в системе координат, связанной с центром масс частиц;

R и $\dot{R}$ — радиус-вектор и скорость (постоянная) центра масс частиц в лабораторной системе координат.

Согласно определению мы в любой момент времени будем иметь

$$r_1 = R + r_1'$$

и соответственно

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{v}_1'.$$

На рис. 36 это векторное соотношение изображено для момента времени после того, когда *уже имело место* рассеяние; в этот момент скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_1'$ образуют углы ϑ и Θ с вектором $\dot{\boldsymbol{R}}$, идущим вдоль начального направления. С помощью этого чертежа находим:

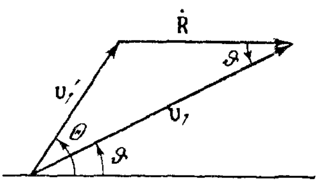

Рис. 36. Векторы скоростей в лабораторной системе координат и в системе координат, движущейся вместе с центром масс.

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v_1' \sin \Theta}{v_1' \cos \Theta + |\dot{\boldsymbol{R}}|}. \qquad (3.69)$$

Кроме того, согласно (3.2) имеем:

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{\mu}{m_1} \dot{\boldsymbol{r}}.$$

Так как рассматриваемая система консервативна, то после рассеяния, когда взаимный потенциал частиц будет равен нулю, относительная скорость будет иметь такую же величину, как начальная скорость $\boldsymbol{v}_0$. Следовательно, после рассеяния будем иметь:

$$v_1' = \frac{\mu}{m_1} v_0. \qquad (3.70)$$

Что касается постоянной скорости центра масс, то она может быть найдена из теоремы о сохранении количества движения, согласно которой

$$(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{R}} = m_1 \boldsymbol{v}_0,$$

откуда

$$\dot{R} = \frac{\mu}{m_2} v_0. \qquad (3.71)$$

Подставив теперь (3.70) и (3.71) в (3.69), получим соотношение между углами ϑ и Θ в виде

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{m_1}{m_2}}. \qquad (3.72)$$

Отсюда видно, что если m_1 во много раз меньше m_2, то эти углы будут приблизительно равны. Это объясняется тем, что в случае большого значения m_2 частица 2 отталкивается очень слабо и практически может считаться неподвижным центром силы.

Так как при переходе к лабораторной системе координат углы рассеяния изменяются, то поперечные сечения рассеяния также будут при этом изменяться. Зависимость между величинами $\sigma(\Theta)$ и $\sigma'(\vartheta)$ можно получить из того условия, что число частиц, рассеиваемых внутри данного телесного угла, должно быть в обеих системах одинаковым. Поэтому можно написать:

$$2\pi I\sigma(\Theta)\sin\Theta\, d\Theta = 2\pi I\sigma'(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

или

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta)\frac{\sin\Theta}{\sin\vartheta}\frac{d\Theta}{d\vartheta} = \sigma(\Theta)\frac{d\cos\Theta}{d\cos\vartheta}, \tag{3.73}$$

где $\sigma'(\vartheta)$ — поперечное сечение рассеяния в лабораторной системе координат. Принципиально равенство (3.72) позволяет выразить Θ через ϑ, и тогда $\sigma'(\vartheta)$ можно будет выразить через $\sigma(\Theta)$, причём это можно сделать для произвольного отношения m_1/m_2. При этом ясно, что в случае рассеяния α-частиц, исследованном Рёзерфордом, соответствующие поправки будут малы, так как m_1 равно здесь 4 атомным единицам, а m_2 обычно равно не менее чем 100 атомным единицам. Если, однако, эти массы равны друг другу (как в случае системы нейтрон — протон), то соответствующие поправки будут максимальными. Равенство (3.72) примет тогда вид

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + 1} = \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2},$$

откуда

$$\vartheta = \frac{\Theta}{2} \qquad (m_1/m_2 = 1). \tag{3.74}$$

В случае $m_1 = m_2$ максимальный угол рассеяния, наблюдаемый в лабораторной системе координат, равен 90°. Соответствующее поперечное сечение рассеяния будет тогда равно

$$\sigma'(\vartheta) = 4\cos\vartheta\,\sigma(2\vartheta) \qquad (m_1/m_2 = 1). \tag{3.75}$$

Описанное рассеяние можно назвать *упругим* в том смысле, что кинетическая энергия системы остаётся после рассеяния такой же, как и до рассеяния. Однако скорости частиц в лабораторной системе координат не будут при этом оставаться неизменными. Рассмотрим, например, *рассеивающую* частицу. Вначале она находится в покое, а после рассеяния приобретает некоторую скорость, а следовательно, и кинетическую энергию. Но так как кинетическая энергия системы должна остаться неизменной, то *рассеиваемая* частица должна уменьшить свою скорость и свою кинетическую энергию. Таким образом, процесс рассеяния сопровождается переносом кинетической энергии от рассеиваемой частицы к рассеивающей. Это уменьшение можно вычислить с помощью теоремы косинусов (см. рис. 36):

$$v_1'^2 = v_1^2 + \dot{R}^2 - 2v_1\dot{R}\cos\vartheta,$$

или, используя выражения (3.70) и (3.71):

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - \frac{2\mu}{m_2}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)\cos\vartheta - \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = 0. \tag{3.76}$$

Полученное равенство представляет собой квадратное уравнение относительно v_1/v_0. В частном случае, когда $m_1 = m_2$, оно имеет следующее особенно простое решение:

$$\frac{v_1}{v_0} = \cos\vartheta \qquad (m_1/m_2 = 1).$$

Отсюда видно, что при $\vartheta = 90°$ (в системе, связанной с центром масс, это соответствует отражению назад, т. е. случаю $\Theta = \pi$) имеет место максимальный перенос энергии, при котором отталкивающая частица m_2 получает всю энергию частицы m_1.

Перенос кинетической энергии посредством рассеяния имеет место при получении потока медленных нейтронов. Быстрые нейтроны, образованные в результате деления, совершают последовательные упругие соударения. При этом их кинетическая энергия понижается до уровня, при котором нейтрон с большей вероятностью способен на деление, чем на захват (без деления). Лучшими замедлителями служат лёгкие элементы. Наибольшей замедляющей способностью обладает водород. Однако применение его как замедлителя в ядерных реакторах ограниченно, так как он сильно поглощает нейтроны. В этом отношении лучшими являются дейтерий, масса которого равна 2, и углерод, масса которого равна 12. В лабораторных условиях, впрочем, для замедления нейтронов постоянно пользуются водородом в виде предельного углеводорода.

Несмотря на свою актуальность, расчёты по переходу от лабораторной системы координат к системе, связанной с центром масс, а также по переносу кинетической энергии не являются особенно «современными» или «квантовыми» по своей природе. Не получила здесь распространения и классическая механика. Всё, что здесь в сущности применяется, — это законы о сохранении количества движения и энергии. Подобные расчёты можно найти в элементарных учебниках, обычно в виде задач об упругих ударах бильярдных шаров. Но эти элементарные законы и делают эти расчёты справедливыми. Дело в том, что если количество движения рассматриваемых частиц сохраняется (а это остаётся верным и в квантовой механике) и соударение является упругим, то детали происходящего здесь процесса становятся несущественными. В сущности, мы их не знаем и имеем здесь «закрытый ларец», относительно которого известно лишь, чтó туда входит и что выходит. Не имеет значения и то, относятся ли происходящие здесь явления к «классическим» или «квантовым». Поэтому мы можем пользоваться формулами данного раздела, не ожидая экспериментального анализа этого явления, в особенности в случае, когда оно имеет квантовый характер (как, например, в системе нейтрон — протон).

Задачи

1. Две частицы движутся друг относительно друга по круговым орбитам под действием гравитационных сил; период этого движения равен τ. В некоторый момент времени их движение внезапно прекращается, после чего они начинают двигаться друг к другу.

Доказать, что промежуток времени, по истечении которого они столкнутся, равен $\tau/4\sqrt{2}$.

2. Частица движется в поле центральной силы, потенциал которой равен

$$V = -k\frac{e^{-ar}}{r},$$

где k и a — положительные постоянные.

Провести качественное исследование этого движения, пользуясь методом эквивалентного одномерного потенциала.

3. Рассмотрите систему, в которой силы F_i, действующие на её точки, состоят из консервативных сил F'_i и сил трения f_i, пропорциональных скоростям соответствующих точек. Покажите, что теорема о вириале будет для такой системы выражаться равенством

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i F'_i \cdot r_i}$$

(при условии, что движение является установившимся и не прекращается в результате действия сил трения).

4. Показать, что если частица движется по дуге круга под действием центральной силы притяжения, направленной к точке той же окружности, то эта сила изменяется обратно пропорционально пятой степени расстояния.

5. Пусть точка движется в поле центральной силы, представляющей степенную функцию от расстояния r. Показать, что задача о движении этой точки может быть решена в эллиптических функциях при следующих значениях показателя степени:

$$n = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}.$$

6. Вычислите приближённое отношение масс Солнца и Земли, пользуясь только продолжительностью года и лунного месяца (27,3 суток), а также средними радиусами орбит Земли ($1{,}49 \cdot 10^8$ *км*) и Луны ($3{,}8 \cdot 10^5$ *км*).

7. Рассмотрите движение точки в поле центральной силы, равной

$$f = -\frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3}.$$

Покажите, что уравнение её орбиты может быть представлено в виде

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\alpha\theta}.$$

При $\alpha = 1$ написанное уравнение изображает эллипс, а при $\alpha \neq 1$ — *прецессирующий* эллипс. Прецессионное движение этого эллипса можно характеризовать *скоростью прецессии его перигелия* (или афелия). Получите приближённое выражение для скорости этой прецессии при $\alpha \approx 1$, выразив её через безразмерную величину

$$\eta = \frac{C}{ka}.$$

Отношение η служит мерой возмущения, вносимого членом C/r^3 в ньютоновскую силу $-k/r^2$. Согласно наблюдениям перигелий Меркурия прецессирует со скоростью $40''$ за столетие. Покажите, что эта прецессия могла бы быть объяснена с позиций классической механики, если бы η было малой величиной, равной $1{,}42 \cdot 10^{-7}$. (Эксцентриситет орбиты Меркурия равен 0,206, а период его обращения равен 0,24 года.)

8. Какие изменения (если они будут) появятся в рассеянии, исследованном Рёзерфордом, если сила Кулона будет не отталкивающей, а притягивающей?

9. Исследуйте рассеяние в поле центральной отталкивающей силы, изменяющейся по закону $f = kr^{-3}$. Покажите, что дифференциальное поперечное сечение определяется в этом случае равенством

$$\sigma(\Theta)\, d\Theta = \frac{k}{2E} \frac{(1-x)\, dx}{x^2 (2-x)^2 \sin \pi x},$$

где через x обозначено отношение Θ/π, а через E — энергия.

10. В ядерной физике часто встречаются центральные силы, потенциал которых определяется равенствами

$$V = 0 \qquad \text{при } r > a,$$
$$V = -V_0 \qquad \text{при } r \leqslant a$$

(так называемая «прямоугольная потенциальная яма»). Показать, что рассеяние в поле такой силы подобно преломлению световых лучей сферой радиуса a при показателе преломления, равном

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}.$$

(Эта аналогия показывает, что преломление света можно было объяснить как с позиций волновой теории Гюйгенса, так и с позиций корпускулярной теории Ньютона.) Показать также, что дифференциальное поперечное сечение равно в этом случае

$$\sigma(\Theta) = \frac{n^2}{2\cos\frac{\Theta}{2}} \frac{\left(n\cos\frac{\Theta}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\Theta}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\Theta}{2}\right)^2}.$$

Каково здесь полное поперечное сечение рассеяния?

11. Показать, что для любой центральной отталкивающей силы угол рассеяния Θ равен

$$\Theta = \pi + 2\int_0^{u_0} \frac{du}{s\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2 u^2}},$$

где V — потенциальная энергия, $u = 1/r$, а u_0 соответствует той точке орбиты, где r имеет минимальное значение. Каково соответствующее выражение для притягивающей силы?

12. (а) Покажите, что угол отражения рассеивающей частицы относительно начального направления отклоняемой частицы имеет следующее простое выражение:

$$\vartheta = \frac{1}{2}(\pi - \Theta).$$

(б) Рассмотрите рассеяние в случае двух частиц равной массы. Наблюдение показывает, что распределение энергии отражённых частиц постоянно до некоторого значения этой энергии и равно нулю выше него. Покажите, что относительно центра масс рассеяние должно быть изотропным.

Рекомендуемая литература

E. T. Whittaker, Analytical Dynamics.

Движению под действием центральных сил уделяется значительное внимание почти в каждом учебнике по механике, однако лишь немногие из них мы считаем возможным здесь рекомендовать. §§ 47—49 книги Уиттекера дают краткое введение в этот вопрос, написанное на достаточно высоком уровне.

W. D. Macmillan, Statics and the Dynamics of Particle.

Глава XII этой книги содержит подробное исследование движения под действием центральной силы. В ней проводится изучение орбит для некоторых законов изменения силы, отличных от обычного закона обратной пропорциональности квадрату расстояния. Изложение ведётся достаточно элементарно, без использования уравнений Лагранжа.

J. C. Slater и N. H. Frank, Mechanics.

Качественное изучение центрального движения с помощью эквивалентного потенциала и центробежного барьера является в современной физике обычным, но редко рассматривается в классической механике. Данная книга составляет исключение, и читатель найдёт в главах III и IV много интересных приложений этого метода.

A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, т. 1, Mechanik.

По вопросу о рассеянии трудно указать какую-либо достаточно полную книгу. Так, например, имеется много книг по атомной или ядерной физике, в которых рассматривается рассеяние, исследованное Рёзерфордом, однако лишь немногие из них рассматривают рассеяние частиц равной массы. Кроме того, ряд материалов по этому вопросу разбросан по отдельным статьям, относящимся главным образом к ядерным исследованиям. В третьем параграфе пятой части рекомендуемой книги проводится интересное исследование соударений, основанное только на теоремах о сохранении количества движения и энергии. Помимо этого, автор коротко останавливается на неупругих ударах. Особенно ценны упражнения к этому параграфу.

R. B. Lindsay, Introduction to Physical Statistics.

В главе V этой книги кратко излагается теорема о вириале, которая затем используется при выводе уравнения состояния для идеальных и реальных газов.

Можно также указать на обширное сочинение по статистической механике Фаулера (R. H. Fowler).

ГЛАВА 4

КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Твёрдое тело было определено нами как система материальных точек с наложенными голономными связями, благодаря которым расстояние между любой парой точек остаётся постоянным в течение всего движения. Хотя это и является в некоторой степени идеализацией, однако такое представление весьма полезно, и поэтому механика твёрдого тела заслуживает подробного рассмотрения. В этой главе мы рассмотрим *кинематику* твёрдого тела, т. е. получим ряд характеристик его движения. При этом мы уделим некоторое внимание развитию специального математического аппарата, имеющего значительный самостоятельный интерес и полезного в приложениях к другим областям физики. После изучения кинематики твёрдого тела мы в следующей главе рассмотрим с помощью лагранжиана движение твёрдого тела под действием приложенных сил и моментов.

§ 4.1. Независимые координаты твёрдого тела. Прежде чем перейти к рассмотрению движения твёрдого тела, установим, сколько нужно независимых координат для задания его положения. Если это тело состоит из N частиц, то оно не может иметь более $3N$ степеней свободы, однако в действительности число этих степеней значительно меньше, так как здесь имеются связи, которые можно представить уравнениями вида

$$r_{ij} = c_{ij}, \tag{4.1}$$

где r_{ij} — расстояние между i-й и j-й точками, а c_{ij} — постоянные. Действительное число степеней свободы нельзя получить простым вычитанием числа уравнений связи из числа $3N$, так как здесь имеется $\frac{1}{2}N(N-1)$ уравнений (4.1), что при большом значении N превышает $3N$. Это связано с тем, что не все уравнения (4.1) являются независимыми, так как для каждой конкретной точки твёрдого тела не обязательно определять её расстояния до *всех* других точек; достаточно задать её расстояния до трёх любых точек, не лежащих на одной прямой (рис. 37). Поэтому, если заданы положения трёх точек твёрдого тела, то положения всех остальных его точек определяются из условий связи. Следовательно, число степеней свободы твёрдого тела не может превышать девяти. Однако три основные точки тела также не являются независимыми. Действительно, здесь имеются три следующих уравнения жёсткой связи, наложенной на эти точки:

$$r_{12}=c_{12}, \quad r_{23}=c_{23}, \quad r_{13}=c_{13}.$$

Эти уравнения уменьшают число степеней свободы до шести.

Тот факт, что для задания положения твёрдого тела нужно только шесть координат, можно было предвидеть, исходя из следующих соображений. Для того чтобы определить положение одной из точек тела, нужно задать три координаты. Но если положение какой-либо точки 1 будет фиксировано, то положение точки 2 можно будет определить только двумя координатами, так как её движение ограничено поверхностью сферы с центром в точке 1. После того как положения точек 1 и 2 определены, точка 3 получает лишь одну степень свободы, так как она может только вращаться вокруг оси, соединяющей точки 1 и 2. Следовательно, в общей сложности нам достаточно иметь лишь шесть координат.

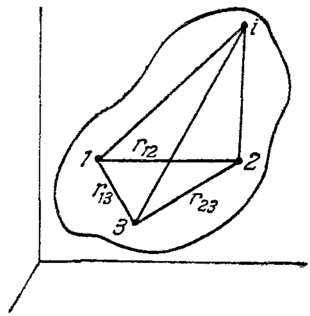

Рис. 37. Определение положения точки в твёрдом теле посредством задания её расстояний от трёх других его точек.

Таким образом, для задания положения твёрдого тела в пространстве требуется шесть независимых обобщённых координат. Число это не зависит от количества частиц, составляющих данное тело, и остаётся тем же даже в предельном случае непрерывного сплошного тела. Конечно, помимо связей, обеспечивающих жёсткость тела, могут иметься и дополнительные связи. Например, движение тела может быть ограничено некоторой поверхностью или тело может иметь одну неподвижную точку. В этих случаях добавочные связи будут уменьшать число степеней свободы, а следовательно, и число независимых координат.

Возникает вопрос о том, как следует выбрать эти координаты. Мы уже отмечали, что положение твёрдого тела полностью определяется положением жёстко связанной с ним системы координат (система $x'y'z'$ на рис. 38). Эта система определяет положение твёрдого тела относительно координатных осей xyz, связанных с окружающим пространством. Ясно, что для того, чтобы задать положение начала подвижной системы (связанной с телом), нужно указать три его координаты. Тогда остальные три координаты должны будут определять ориентацию осей $x'y'z'$ относительно системы, начало которой находится в точке O', а оси параллельны осям xyz.

Существует много способов задания ориентации одной декартовой системы относительно другой, имеющей с ней общее начало. Наиболее удачный из них состоит в задании направляющих косинусов осей $x'y'z'$ относительно осей xyz. Ось x', например, можно определить тремя её направляющими косинусами α_1, α_2, α_3. Если единичные векторы осей x, y, z обозначить, как обычно, через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, а единичные векторы осей x', y', z' — через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, то эти направляющие косинусы можно записать в виде:

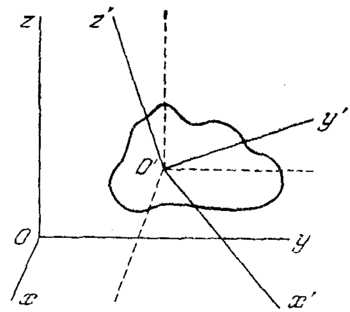

Рис. 38. Неподвижная система координат и система координат, связанная с твёрдым телом.

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \cos(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i},\\ \alpha_2 &= \cos(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j},\\ \alpha_3 &= \cos(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{k}.\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Вектор $\boldsymbol{i}'$ можно выразить через векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ с помощью соотношений

$$\boldsymbol{i}' = (\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j})\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{k})\,\boldsymbol{k}$$

или

$$\boldsymbol{i}' = \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j} + \alpha_3\boldsymbol{k}. \tag{4.3}$$

Аналогичные выражения можно получить и для направляющих косинусов оси y' относительно осей x, y, z. Они будут компонентами вектора $\boldsymbol{j}$ в неподвижной системе координат, и, обозначив их через β_1, β_2, β_3, получим:

$$\boldsymbol{j}' = \beta_1\boldsymbol{i} + \beta_2\boldsymbol{j} + \beta_3\boldsymbol{k}. \tag{4.4}$$

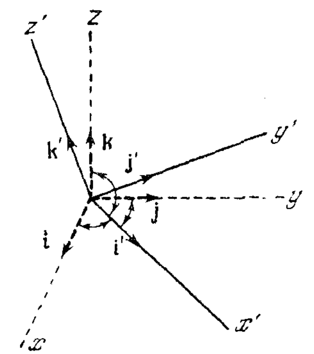

Рис. 39. Углы, определяющие положение подвижной системы координат относительно неподвижной.

Наконец, обозначив направляющие косинусы оси z' через γ_1, γ_2, γ_3, мы получим ещё одно аналогичное уравнение, относящееся к вектору $\boldsymbol{k}'$. Система из девяти направляющих косинусов будет полностью определять ориентацию системы $x'y'z'$ относительно системы xyz. С равным основанием мы можем обратить этот процесс и использовать направляющие косинусы для выражения единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ через их составляющие по осям x', y', z'. В этом случае будем иметь

$$\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}')\,\boldsymbol{i}' + (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}')\,\boldsymbol{j}' + (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}')\,\boldsymbol{k}'.$$

или

$$\boldsymbol{i} = \alpha_1 \boldsymbol{i}' + \beta_1 \boldsymbol{j}' + \gamma_1 \boldsymbol{k}' \tag{4.5}$$

и аналогично для векторов $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$.

Направляющие косинусы позволяют также выразить координаты некоторой точки в системе $x'y'z'$ через её координаты в системе xyz. Так как координаты точки относительно некоторой системы являются проекциями её радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ на оси этой системы, то

$$x' = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{i}', \quad y' = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}', \quad z' = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}',$$

или

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \right\} \tag{4.6}$$

Написанные соотношения справедливы не только для радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, но и для любого другого вектора. Так, например, если $\boldsymbol{G}$ есть некоторый вектор, то между его проекцией на ось x' и проекциями на оси x, y, z будет иметь место соотношение

$$G_{x'} = (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{i}') = \alpha_1 G_x + \alpha_2 G_y + \alpha_3 G_z.$$

Аналогичные соотношения можно написать и для $G_{y'}$, и $G_{z'}$. Таким образом, девять направляющих косинусов полностью определяют переход от одной координатной системы к другой.

Если подвижные оси $x'y'z'$ жёстко связаны с телом, то девять направляющих косинусов будут функциями времени (так как в процессе движения тело изменяет свою ориентацию). В этом смысле величины α, β, γ можно рассматривать как координаты, описывающие мгновенную ориентацию тела. Однако ясно, что они не являются независимыми, так как их девять, а мы знаем, что для определения ориентации тела достаточно задать только три координаты.

Соотношения между направляющими косинусами определяются тем обстоятельством, что орты осей каждой системы ортогональны друг другу и, кроме того, имеют единичную величину. Это можно записать в виде равенств:

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$$

и

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{4.7}$$

и аналогично для $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$. Подставив сюда вместо $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ их выражения через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ [согласно (4.5)], мы получим условия, которым должны удовлетворять девять коэффициентов α, β, γ:

$$\begin{aligned} \alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m &= 0 \qquad (l,\ m = 1,\ 2,\ 3;\ l \neq m), \\ \alpha_l^2 + \beta_l^2 + \gamma_l^2 &= 1 \qquad (l = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Эти две системы уравнений вполне достаточны для того, чтобы уменьшить число независимых коэффициентов с девяти до трёх. Формально эти шесть уравнений можно объединить в одно с помощью символа Кронекера δ_{lm}, определяемого следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{lm} &= 1 \qquad (l = m), \\ \delta_{lm} &= 0 \qquad (l \neq m). \end{aligned}$$

Если воспользоваться этим символом, то уравнения (4.8) можно записать в виде

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = \delta_{lm}. \tag{4.9}$$

Из сказанного ясно, что, пользуясь девятью направляющими косинусами как обобщёнными координатами, нельзя получить лагранжиан и составить с его помощью уравнения движения. Для этой цели мы должны использовать не сами эти косинусы, а некоторую систему трёх независимых функций этих косинусов. Некоторые такие системы независимых переменных, из которых наиболее важной является система углов Эйлера, будут описаны нами позже. Однако применение направляющих косинусов для описания связи между двумя декартовыми системами координат имеет ряд собственных важных преимуществ. Так, например, многие теоремы о движении твёрдых тел можно получить с их помощью весьма изящным и общим способом, притом в форме, встречающейся в специальной теории относительности и в квантовой механике. Поэтому этот метод заслуживает более подробного изложения.

§ 4.2. Ортогональные преобразования. Для более удобного рассмотрения девяти направляющих косинусов целесообразно изменить обозначения и все координаты обозначать символом x, различая их посредством соответствующих индексов. Таким образом, мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\left.\begin{aligned} x &\to x_1, \\ y &\to x_2, \\ z &\to x_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

В этих обозначениях уравнения (4.6) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \\ x_2' &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \\ x_3' &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Равенства (4.11) представляют собой формулы перехода от системы координат $x_1 x_2 x_3$ к новой системе $x_1' x_2' x_3'$. Они могут служить примером *линейного преобразования*, определяемого уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

где a_{11}, a_{12}, ... — постоянные коэффициенты *) (не зависящие от x и x'). Уравнения (4.11) являются лишь специальным случаем уравнений (4.12), так как не все направляющие косинусы являются независимыми.

Зависимости между коэффициентами рассматриваемого преобразования [формулы (4.8)] можно теперь получить, исходя из равенств (4.12). Так как наши координатные системы являются декартовыми, то в каждой из них величина радиуса-вектора некоторой точки равна корню квадратному из суммы квадратов его составляющих. Но величина вектора не зависит от того, в какой системе координат он рассматривается, и поэтому она должна быть в этих системах одинаковой. Следовательно, величина

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \tag{4.13}$$

является при этом преобразовании инвариантной. Записывая уравнения (4.12) в более компактной форме

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{4.14}$$

мы для левой части равенства (4.13) получим:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k\right) = \sum_{i=1}^{3}\ \sum_{j,\ k=1}^{3} a_{ij}a_{ik}x_jx_k,$$

или, изменяя порядок суммирования:

$$\sum_{j,k}\left(\sum_{i} a_{ij}a_{ik}\right) x_jx_k.$$

Полученное выражение будет равно правой части равенства (4.13) только в том случае, если

$$\sum_{i} a_{ij}a_{ik} = 1 \qquad \text{при } j = k,$$

$$\sum_{i} a_{ij}a_{ik} = 0 \qquad \text{при } j \neq k$$

*) Уравнения (4.12) являются, конечно, не самыми общими уравнениями преобразования [см., например, уравнения (1.36), описывающие переход от r к q].

или, в более компактной записи, если

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{4.15}$$

Если фигурирующие здесь коэффициенты a_{ij} заменить коэффициентами α, β, γ, то шесть уравнений (4.15) перейдут в уравнения (4.9).

Любое линейное преобразование (4.12), удовлетворяющее условиям (4.15), называется *ортогональным*, а сами условия (4.15) известны под названием *условий ортогональности*. Таким образом, переход от неподвижной системы координат к системе, жёстко связанной с твёрдым телом, совершается посредством ортогонального преобразования. Записывая коэффициенты преобразования (направляющие косинусы) в виде таблицы

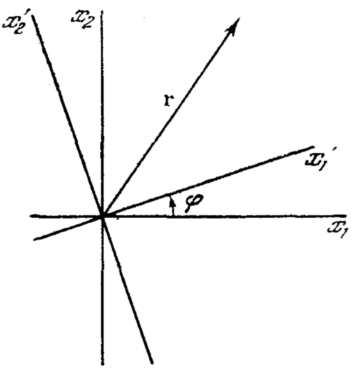

Рис. 40. Поворот плоской системы координат, осуществляющий ортогональное преобразование.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \tag{4.16}$$

мы получаем так называемую *матрицу преобразования*. Будем обозначать её через A. Величины a_{ij} называют *элементами матрицы* преобразования.

Чтобы сделать все эти формальные выкладки более наглядными, мы рассмотрим один простой пример. Пусть рассматриваемое движение является плоским. Тогда соответствующие координатные системы также будут плоскими и индексы при коэффициентах a_{ij} будут принимать лишь два значения: 1 и 2. Матрица преобразования будет тогда иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Четыре элемента этой матрицы должны быть связаны тремя условиями ортогональности:

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \qquad (j,\ k = 1,\ 2).$$

Следовательно, это преобразование определяется только одним независимым параметром. Такой вывод не является, конечно, неожиданным, так как переход от одной плоской системы координат к другой осуществляется посредством поворота координатных осей в их плоскости (рис. 40) и поэтому полностью определяется одной величиной: углом поворота φ. Выражая уравнения этого преобразования через параметр φ, получим:

$$x_1' = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,$$
$$x_2' = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi, & a_{12} &= \sin\varphi, \\ a_{21} &= -\sin\varphi, & a_{22} &= \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

так что матрица A примет вид

$$\mathsf{A} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}. \tag{4.17$'$}$$

Три условия ортогональности будут здесь иметь вид:

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = 1,$$
$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = 1,$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

и, очевидно, будут удовлетворены, так как, заменяя элементы a_i их выражениями (4.17), получаем:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$
$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$
$$\cos\varphi \sin\varphi - \sin\varphi \cos\varphi = 0.$$

Матрицу A можно рассматривать как *оператор*, который, действуя на систему $x_1x_2x_3$, преобразует её в систему $x_1'x_2'x_3'$. Символически это можно записать в виде равенства

$$(\boldsymbol{r})' = \mathsf{A}\boldsymbol{r}, \tag{4.18}$$

которое мы прочтём следующим образом: матрица A, действуя на составляющие вектора $\boldsymbol{r}$ в системе $x_1x_2x_3$, переводит их в составляющие этого вектора в системе $x_1'x_2'x_3'$. Следует подчеркнуть, что матрица A действовала до сих пор только на координатную систему. Вектор $\boldsymbol{r}$ оставался при этом неизменным, и мы лишь искали его компоненты в двух различных системах координат. Поэтому вектор $\boldsymbol{r}$ в левой части формулы (4.18) мы заключили в скобки, подчёркивая тем самым, что в обеих частях этого равенства фигурирует один и тот же вектор, изменяются только его составляющие. Мы видели, что в двумерном случае это преобразо-

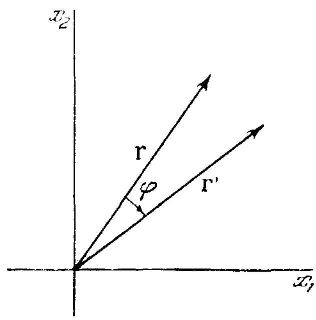

Рис. 41. Интерпретация ортогонального преобразования с помощью поворота вектора $\boldsymbol{r}$ в неизменной системе координат.

вание является обычным вращением, и матрица A совпадает с *оператором поворота* в рассматриваемой плоскости.

Однако следует иметь в виду, что, не меняя формальной математической стороны, мы можем под A понимать также оператор, *действующий на вектор $\boldsymbol{r}$* и преобразующий его в другой вектор $\boldsymbol{r}'$. Это можно записать в виде равенства

$$\boldsymbol{r}' = \mathsf{A}\boldsymbol{r}, \tag{4.19}$$

в котором *оба вектора рассматриваются в одной и той же системе координат*. Тогда в двумерном случае мы вместо вращения координатной системы получим вращение вектора $\boldsymbol{r}$, который нужно будет повернуть по часовой стрелке на угол φ для совмещения его с новым вектором $\boldsymbol{r}'$. Составляющие нового вектора будут связаны с составляющими старого вектора теми же уравнениями (4.12), которые описывают преобразование системы координат. Поэтому с формальной точки зрения мы в уравнении (4.18) не обязаны ставить скобки. Это уравнение можно писать так же, как уравнение (4.19), и интерпретировать либо как операцию над координатной системой, либо как операцию над вектором. Алгебра соответствующего преобразования не зависит от того, какой из двух точек зрения мы будем придерживаться. Интерпретация матрицы A как оператора, действующего на координатную систему, будет более целесообразна в том случае, когда рассматривается ортогональное преобразование, определяющее ориентацию твёрдого тела. С другой стороны, интерпретация этой матрицы как оператора, преобразующего один вектор в другой, имеет более широкое применение. При формально математическом рассмотрении можно пользоваться любой из этих интерпретаций в зависимости от удобства. Нужно, однако, помнить, что смысл операции, представляемой оператором A, будет изменяться при изменении интерпретации. Так, например, если в одном случае оператор A означает вращение системы координат на угол φ *против хода часовой стрелки*, то в другом случае он будет означать вращение вектора *по ходу часовой стрелки*.

§ 4.3. Формальные свойства матрицы преобразования. Рассмотрим преобразования, соответствующие двум последовательным поворотам твёрдого тела. Первое из этих преобразований, соответствующее переходу от $\boldsymbol{r}$ к $\boldsymbol{r}'$, мы обозначим через B. Тогда будем иметь:

$$x'_k = \sum_j b_{kj} x_j. \tag{4.20}$$

Последующее преобразование, соответствующее переходу к третьей координатной системе, т. е. от $\boldsymbol{r}'$ к $\boldsymbol{r}''$, мы обозначим через A.

Тогда аналогично получим:

$$x_i'' = \sum_k a_{ik} x_k'. \tag{4.21}$$

Объединяя теперь уравнения (4.20) и (4.21), мы можем получить соотношение между x_i'' и x_j:

$$x_i'' = \sum_k a_{ik} \sum_j b_{kj} x_j = \sum_j \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) x_j,$$

что можно записать в виде:

$$x_i'' = \sum_j c_{ij} x_j, \tag{4.22}$$

где

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}. \tag{4.23}$$

Таким образом, последовательное применение двух ортогональных преобразований A и B эквивалентно третьему линейному преобразованию — преобразованию C. Можно показать, что оно также является ортогональным. (Доказательство мы предоставляем провести читателям самостоятельно в качестве упражнения.) Символически результирующий оператор C можно рассматривать как произведение операторов A и B:

$$\mathsf{C} = \mathsf{AB},$$

и элементы c_{ij} будут по определению элементами матрицы, получаемой от перемножения матриц A и B.

Заметим, что это «матричное» или операторное умножение не обладает свойством коммутативности, и поэтому в общем случае

$$\mathsf{BA} \neq \mathsf{AB}.$$

Действительно, по определению, элементами преобразования $\mathsf{D} = \mathsf{BA}$ будут

$$d_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj}, \tag{4.24}$$

которые в общем случае не совпадают с элементами матрицы C, определяемыми уравнениями (4.23). Следовательно, конечная координатная система будет зависеть от того, какой из операторов A и B действует раньше: сначала A, а потом B или наоборот. Однако умножение матриц обладает свойством ассоциативности, т. е. при перемножении трёх или более матриц последовательность этих умножений может быть выбрана произвольно, что можно записать в виде равенства

$$(\mathsf{AB})\,\mathsf{C} = \mathsf{A}\,(\mathsf{BC}). \tag{4.25}$$

Мы уже говорили, что, записывая уравнение (4.19) в виде $\boldsymbol{r}' = \mathsf{A}\boldsymbol{r}$, мы просто пользуемся символическим обозначением для указания определённой операции A, совершаемой над координатной системой (или над вектором). Но, расширяя наше понятие о матрицах, можно сделать так, что эта запись будет указывать на действительное умножение: на умножение матриц. Матрицы, рассматривавшиеся нами до сих пор, были квадратными, т. е. число их строк равнялось числу столбцов. Однако можно рассматривать также матрицы, состоящие всего лишь из одного столбца, такие, как

$$\mathsf{x}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad \mathsf{x}'=\begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}. \tag{4.26}$$

Под произведением Ax мы, по определению умножения матриц, будем понимать матрицу, состоящую из столбца с элементами

$$(\mathsf{Ax})_i=\sum_j a_{ij}x_j=x_i'.$$

Поэтому уравнение (4.19) мы сможем записать в виде равенства

$$\mathsf{x}'=\mathsf{Ax}, \tag{4.27}$$

рассматривая его как матричное уравнение.

Сложение двух матриц не является такой важной операцией, как их умножение, однако оно встречается достаточно часто. Под суммой $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ понимается такая матрица C, элементы которой получаются посредством сложения соответствующих элементов A и B. Таким образом, можно написать:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Большое значение имеет преобразование, обратное A, т. е. операция, посредством которой вектор $\boldsymbol{r}'$ преобразуется обратно в $\boldsymbol{r}$. Это преобразование мы будем обозначать символом A^{-1}, а элементы соответствующей матрицы обозначим через a_{ij}'. Тогда мы будем иметь систему уравнений

$$x_i=\sum_j a_{ij}'x_j', \tag{4.28}$$

которая должна согласовываться с системой

$$x_k'=\sum_i a_{ki}x_i. \tag{4.29}$$

Подставляя в последнюю систему x_i из (4.28), получаем:

$$x_k'=\sum_i a_{ki}\sum_j a_{ij}'x_j'=\sum_j\left(\sum_i a_{ki}a_{ij}'\right)x_j', \tag{4.29'}$$

и так как составляющие вектора $\boldsymbol{r}'$ являются независимыми, то уравнение (4.29') будет справедливым только тогда, когда правая часть его будет тождественно равна x'_k. Поэтому при $j=k$ коэффициент при x'_j должен быть равен единице, а при $j \neq k$ — нулю. Следовательно, можно написать:

$$\sum_i a_{ki} a'_{ij} = \delta_{kj}. \tag{4.30}$$

Легко видеть, что левая часть этого равенства представляет элемент матрицы AA^{-1}, а правая — элемент так называемой единичной матрицы, равной

$$\mathsf{1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{4.31}$$

Поэтому (4.30) можно записать в виде:

$$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{1}, \tag{4.32}$$

из которого становится ясным обозначение A^{-1}, принятое нами для обратной матрицы. Преобразование, соответствующее матрице $\mathsf{1}$, известно под названием *тождественного преобразования*. Оно не изменяет первоначальной координатной системы, т. е. для него справедливо равенство

$$\mathsf{x} = \mathsf{1x}.$$

Аналогичное равенство имеет место и для умножения матрицы $\mathsf{1}$ на произвольную матрицу A, притом независимо от порядка этого умножения. Таким образом,

$$\mathsf{1A} = \mathsf{A1} = \mathsf{A}.$$

Слегка изменяя порядок доказательства равенства (4.32), покажем, что A и A^{-1} коммутативны. Вместо того, чтобы подставлять x_i из (4.28) в (4.29), можно с тем же основанием исключить из этих уравнений не x, а x', что приведёт к равенству

$$\sum_j a'_{ij} a_{jk} = \delta_{ik},$$

аналогичному (4.30). Записав полученное равенство в матричных обозначениях, получим:

$$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{1}, \tag{4.33}$$

что и доказывает коммутативность умножения матриц A и A^{-1}.

Рассмотрим теперь двойную сумму

$$\sum_{k,i} a_{kl} a_{ki} a'_{ij}.$$

Если вычислять её, суммируя сначала по k, а потом по i, то она примет вид

$$\sum_i \left(\sum_k a_{kl} a_{ki}\right) a'_{ij}.$$

Если же производить суммирование в обратном порядке, то её можно будет записать в виде

$$\sum_k \left(\sum_i a_{ki} a'_{ij}\right) a_{kl}.$$

Пользуясь условиями ортогональности [равенствами (4.15)], мы при первом способе суммирования получим:

$$\sum_i \delta_{il} a'_{ij} = a'_{lj}.$$

С другой стороны, при втором способе суммирования мы на основании (4.30) получим:

$$\sum_k \delta_{kj} a_{kl} = a_{jl}.$$

Следовательно, элементы прямой матрицы A и обратной A^{-1} связаны соотношениями

$$a'_{ij} = a_{ji}. \tag{4.34}$$

Матрица, получаемая из A посредством замены строк столбцами, называется *транспонированной* и обозначается через $\tilde{\mathsf{A}}$. Таким образом, равенства (4.34) показывают, что если матрица A является ортогональной, то обратная ей матрица A^{-1} совпадает с транспонированной матрицей $\tilde{\mathsf{A}}$. Если равенство

$$\mathsf{A}^{-1} = \tilde{\mathsf{A}} \tag{4.35}$$

подставить в равенство (4.33), то будем иметь:

$$\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{A} = 1. \tag{4.36}$$

Полученное соотношение совпадает с условием ортогональности, записанным в форме (4.15), в чём можно убедиться с помощью непосредственного вычисления произведения (4.36) *).

---

*) Нужно заметить, что равенство (4.35) можно получить непосредственно из условий ортогональности в форме (4.36), причём краткость этого способа указывает на преимущество символических методов. Умножая (4.36) справа на A^{-1}, получаем:

$$\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}.$$

Отсюда с помощью (4.32) будем иметь:

$$\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^{-1}.$$

Другая форма условий ортогональности может быть получена подстановкой соотношения (4.34) в равенство (4.30):

$$\sum_i a_{ki}a_{ji} = \delta_{kj}, \tag{4.37}$$

что в символической форме можно записать в виде

$$\mathsf{A}\tilde{\mathsf{A}} = 1.$$

Полученное равенство может быть также выведено непосредственно из (4.36) посредством умножения его слева на A и справа на A^{-1}.

В связи с понятием о транспонированной матрице вводится также понятие матрицы, комплексно с ней сопряжённой. Эта матрица известна под названием *сопряжённой*, или *эрмитовски сопряжённой* с данной матрицей; мы будем её обозначать символом A^{+}. Таким образом,

$$\mathsf{A}^{+} = (\tilde{\mathsf{A}})^{*}. \tag{4.38}$$

Подобно тому как ортогональной матрицей называется такая, которая удовлетворяет условию (4.36), *унитарной матрицей* называется матрица A, удовлетворяющая условию

$$\mathsf{A}^{+}\mathsf{A} = 1. \tag{4.39}$$

Матрица, определяющая ориентацию твёрдого тела, должна быть вещественной, так как и x и x' являются вещественными. В этом случае нет разницы между свойством ортогональности и свойством унитарности, т. е. между транспонированной матрицей и эрмитовски сопряжённой. Короче говоря, вещественная ортогональная матрица является в то же время унитарной. Но вскоре в этой главе, а также позже в теории относительности, мы встретимся с комплексными матрицами, и тогда обнаружится существенное различие между ортогональностью и унитарностью.

Мы знаем, что матрицу можно интерпретировать, во-первых, как оператор, преобразующий вектор, и, во-вторых, как оператор, преобразующий координатную систему. Мы сейчас рассмотрим задачу, в которой имеют место обе эти интерпретации. Это — задача о преобразовании оператора при изменении системы координат. Пусть A означает оператор, действующий на вектор $\boldsymbol{F}$ (или матрицу F, состоящую из одного столбца) и преобразующий его в вектор $\boldsymbol{G}$. Тогда можно написать:

$$\mathsf{G} = \mathsf{AF}.$$

Пусть теперь рассматриваемая координатная система преобразуется матрицей B. Тогда в новой системе координат составляющие вектора $\boldsymbol{G}$ будут определяться равенством

$$\mathsf{BG} = \mathsf{BAF},$$

что можно записать также в виде

$$\mathsf{BG} = \mathsf{BAB}^{-1}\mathsf{BF}. \tag{4.40}$$

Уравнение (4.40) показывает, что если на вектор $\boldsymbol{F}$, выраженный в новой системе координат, подействовать оператором BAB^{-1}, то получится вектор $\boldsymbol{G}$, также выраженный в новой системе. Поэтому произведение BAB^{-1} можно рассматривать как оператор A, преобразованный к новым осям. В связи с этим можно написать:

$$\mathsf{A}' = \mathsf{BAB}^{-1}. \tag{4.41}$$

Любое преобразование, имеющее вид (4.41), называется *подобным преобразованием*.

Рассмотрим в связи с этим преобразованием некоторые свойства детерминанта, образованного из элементов квадратной матрицы. Как обычно, мы будем детерминант матрицы A обозначать через $|\mathsf{A}|$. Процедура умножения матриц совпадает, как известно, с процедурой умножения детерминантов [см. Bôcher, Jntroduction to Higher Algebra *), стр. 26]. Поэтому справедливо равенство

$$|\mathsf{AB}| = |\mathsf{A}|\cdot|\mathsf{B}|.$$

Приняв теперь во внимание, что детерминант единичной матрицы равен единице, мы из условия ортогональности (4.36) получим:

$$|\tilde{\mathsf{A}}|\cdot|\mathsf{A}| = 1.$$

Далее, так как величина детерминанта не изменяется при замене его строк столбцами, то можно написать:

$$|\mathsf{A}|^2 = 1. \tag{4.42}$$

Отсюда следует, что детерминант ортогональной матрицы может быть равен только $+1$ или -1. В дальнейшем мы будем иметь возможность подробно остановиться на геометрическом смысле каждого из этих значений.

В случае, когда матрица не является ортогональной, её детерминант, конечно, не обязательно имеет одно из этих простых значений. Можно показать, однако, что значение любого детерминанта инвариантно по отношению к подобным преобразованиям. Рассмотрим для этого формулу (4.41) для преобразованной матрицы A' и умножим её справа на B. Тогда будем иметь:

$$\mathsf{A}'\mathsf{B} = \mathsf{BA},$$

или, переходя к детерминантам:

$$|\mathsf{A}'|\cdot|\mathsf{B}| = |\mathsf{B}|\cdot|\mathsf{A}|.$$

*) Имеется русский перевод: Бохер М., Введение в высшую алгебру, М. — Л., Гостехиздат, 1933.

Но так как детерминант B есть число, отличное от нуля*), то мы можем разделить обе части этого равенства на $|\mathsf{B}|$ и тогда получим

$$|\mathsf{A}'| = |\mathsf{A}|,$$

что и требовалось доказать.

Позже, при рассмотрении движения твёрдого тела, все эти преобразования матриц, в особенности ортогональные, найдут своё приложение. Кроме того, нам потребуются некоторые другие соотношения, которые мы будем выводить по мере необходимости.

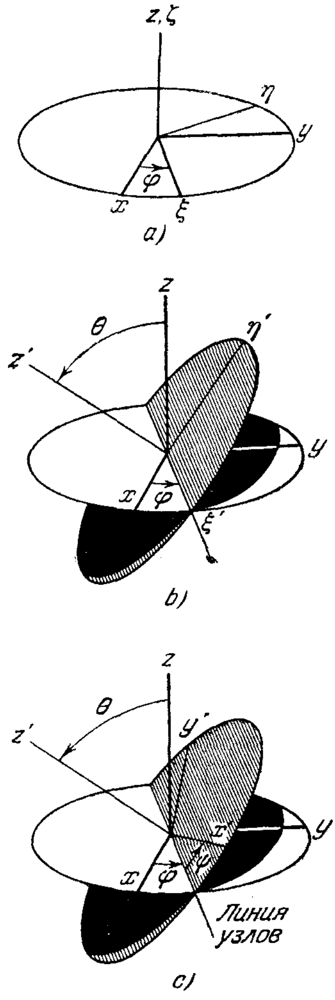

Рис. 42. Углы Эйлера.

§ 4.4. Углы Эйлера. Мы уже говорили, что так как элементы a_{ij} не являются независимыми, то они не могут быть приняты за обобщённые координаты. Поэтому для исследования движения твёрдого тела с помощью лагранжиана необходимо предварительно выбрать три независимых параметра, определяющих ориентацию твёрдого тела. Только после того, как такие обобщённые координаты будут выбраны, можно будет вычислять лагранжиан и составлять уравнения Лагранжа. Известен целый ряд таких параметров. Наиболее распространёнными и удобными из них являются *углы Эйлера*. Поэтому мы дадим сейчас определение этих углов и покажем, как можно через них выразить элементы матрицы ортогонального преобразования.

Переход от одной декартовой системы координат к другой может быть выполнен посредством трёх последовательных поворотов, совершаемых в определённом порядке. Тогда углы Эйлера определятся как три последовательных угла соответствующих поворотов. Прежде всего начнём с поворота начальной системы xyz вокруг оси z. Повернув её на некоторый угол φ против хода часовой стрелки,

*) Если бы этот детерминант был равен нулю, то не существовало бы обратного оператора B^{-1} (это следует из правила Крамера) и равенство (4.41) не имело бы смысла.

мы перейдём к координатной системе $\xi\eta\zeta$. Полученную промежуточную систему $\xi\eta\zeta$ мы повернём затем вокруг оси ξ, совершив этот поворот против хода часовой стрелки на некоторый угол θ. Тогда у нас образуется новая промежуточная система — система $\xi'\eta'\zeta'$. Ось ξ будет при этом идти по линии пересечения плоскостей xy и $\xi'\eta'$. Эта линия называется линией узлов. Повернув, наконец, оси $\xi'\eta'\zeta'$ вокруг оси ζ' против хода часовой стрелки на угол ψ, мы получим требуемую систему $x'y'z'$. На рис. 42 эти повороты показаны в различных стадиях. Таким образом, углы Эйлера θ, φ, ψ полностью определяют ориентацию системы $x'y'z'$ относительно системы xyz. Поэтому они могут быть выбраны в качестве обобщённых координат *).

Элементы полного преобразования A можно теперь получить, перемножая матрицы трёх описанных вращений, каждая из которых имеет сравнительно простой вид. Первый поворот, который совершается вокруг оси z, описывается некоторой матрицей D, и поэтому можно написать:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathsf{D}\mathbf{x},$$

где $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{x}$ — матрицы, состоящие из одного столбца. Аналогично, переход от системы $\xi\eta\zeta$ к системе $\xi'\eta'\zeta'$ описывается уравнением

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathsf{C}\boldsymbol{\xi},$$

где C — матрица этого преобразования. Наконец, последний поворот, осуществляющий переход к системе $x'y'z'$, описывается матрицей B, и поэтому

$$\mathbf{x}' = \mathsf{B}\boldsymbol{\xi}'.$$

Следовательно, суммарное преобразование

$$\mathbf{x}' = \mathsf{A}\mathbf{x}$$

осуществляется матрицей A, равной

$$\mathsf{A} = \mathsf{BCD}.$$

Первое из рассмотренных преобразований представляет вращение

*) К сожалению, разные авторы по-разному определяют углы Эйлера. Различия здесь не очень велики, однако они часто затрудняют сравнение получаемых результатов, например элементов матрицы. Наибольшая путаница, по-видимому, возникает из-за применения некоторыми авторами левой системы координат (например, Осгуд, а также Маргенау и Мэрфи). Более часто, однако, встречается другое отличие, состоящее в отсчёте угла линии узлов не от оси x, а от оси y. Это особенно характерно для Британской школы (Уиттекер, Ньюболт, Эйме и Марнафан) и связано с тем, что второй поворот производится не вокруг оси ξ, а вокруг оси η. Принятые нами углы φ и ψ были бы тогда равны соответственно $\varphi + \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} - \psi$. Иностранные авторы обычно пользуются теми же углами, какими пользуемся и мы, но углы φ и ψ у них часто меняются местами. Этим, однако, ещё не исчерпывается возможная путаница; так, например, многие авторы трудов по квантовой механике отсчитывают углы поворота не против хода часовой стрелки, как делаем это мы, а по ходу.

вокруг оси z, и, следовательно, матрица его имеет вид

$$\mathsf{D}=\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{4.43}$$

[см. уравнение (4.17)]. Преобразование C представляет собой вращение вокруг оси ξ, и поэтому

$$\mathsf{C}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}. \tag{4.44}$$

Наконец, последнее преобразование есть вращение вокруг оси ζ', и поэтому матрица B имеет такой же вид, как D:

$$\mathsf{B}=\begin{Vmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{4.45}$$

Вычисляя теперь полную матрицу $\mathsf{A}=\mathsf{BCD}$, будем иметь:

$$\mathsf{A}=\begin{Vmatrix} \cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{Vmatrix}. \tag{4.46}$$

Преобразование, обратное A, осуществляющее переход от системы, связанной с телом, к неподвижной системе xyz, описывается уравнением

$$\mathsf{x}=\mathsf{A}^{-1}\mathsf{x}',$$

и матрица этого преобразования A^{-1} есть просто транспонированная матрица $\tilde{\mathsf{A}}$:

$$\mathsf{A}^{-1}=\tilde{\mathsf{A}}=$$
$$=\begin{Vmatrix} \cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{Vmatrix}. \tag{4.47}$$

Проверку проделанных нами умножений матриц, а также проверку ортогональности матрицы A мы предоставляем читателям произвести самостоятельно в качестве упражнения.

§ 4.5. Параметры Кэйли — Клейна. Для определения ориентации твёрдого тела применяются и различные другие переменные, удобные в некоторых специальных исследованиях. Такими переменными, в частности, являются так называемые *параметры Кэйли — Клейна*, на которых следует остановиться более подробно, так как они представляют известный интерес.

Число этих параметров равно четырём, и, следовательно, они не являются независимыми, вследствие чего не могут служить в качестве обобщённых координат. Они были введены в классическую механику Ф. Клейном главным образом для облегчения интегрирования уравнений при решении сложных гироскопических задач. В настоящее время эти координаты интересны главным образом тем, что они тесно связаны с вопросом о пространственном вращении в квантовой механике.

В предыдущих параграфах мы рассматривали ортогональные преобразования в действительном двумерном пространстве с осями x_1 и x_2. Теперь мы рассмотрим другое двумерное пространство, являющееся комплексным. Оси его мы обозначим через u и v. Общее линейное преобразование в таком пространстве имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v, \\ v' &= \gamma u + \delta v, \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

и матрицей этого преобразования будет

$$\mathbf{Q} = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}. \tag{4.49}$$

В дальнейшем мы ограничимся лишь такими преобразованиями $\mathbf{Q}$, которые являются унитарными и детерминант которых равен $+1$. Следует подчеркнуть, что эти требования являются независимыми, так как свойство унитарности [формула (4.39)] имеет вид:

$$\mathbf{Q}^{+}\mathbf{Q} = \mathbf{1}. \tag{4.50}$$

Отсюда следует, что

$$|\mathbf{Q}|^{*}|\mathbf{Q}| = 1.$$

Из этого равенства видно, что детерминант $|\mathbf{Q}|$ имеет модуль, равный единице, но аргумент его может быть при этом произвольным. Поэтому условие $|\mathbf{Q}| = 1$, или, более подробно,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1, \tag{4.51}$$

является дополнительным требованием и не содержится в унитарности этого преобразования.

Матрица общего линейного преобразования в двумерном комплексном пространстве имеет *восемь* величин, так как каждый из четырёх её элементов является комплексным. Однако наложенные нами требования уменьшают число *независимых* величин этой матрицы. Если условие унитарности [уравнение (4.50)] раскрыть, то оно запишется в виде следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^*\alpha+\beta^*\beta &= 1, \\ \gamma^*\gamma+\delta^*\delta &= 1, \\ \alpha^*\gamma+\beta^*\delta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.52}$$

Здесь два первых уравнения вещественные, а третье комплексное' и поэтому в них содержатся четыре условия. Пятым условием здесь будет условие (4.51), накладываемое на детерминант этого преобразования. Поэтому матрица $\mathbf{Q}$ содержит только три независимых величины, т. е. как раз такое число, какое нужно для определения ориентации твёрдого тела в трёхмерном пространстве.

Некоторые из преобразований, приводящих к независимым параметрам этой матрицы, можно выполнить без особых трудностей. Так, например, из последнего уравнения (4.52) получаем

$$\frac{\delta}{\gamma}=-\frac{\alpha^*}{\beta^*}, \tag{4.53}$$

что после подстановки в условие (4.51) даёт

$$-(\alpha\alpha^*+\beta\beta^*)\frac{\gamma}{\beta^*}=1.$$

Но согласно первому из уравнений (4.52) величина, стоящая в скобках, равна единице. Следовательно,

$$\gamma=-\beta^*. \tag{4.54}$$

Отсюда на основании (4.53) получаем

$$\delta=\alpha^*. \tag{4.55}$$

На основании четырёх полученных условий [равенств (4.54) и (4.55)] матрицу $\mathbf{Q}$ можно записать в виде

$$\mathbf{Q}=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{Vmatrix} \tag{4.56}$$

с одним остающимся условием

$$\alpha\alpha^*+\beta\beta^*=1. \tag{4.57}$$

Однако мы часто будем предпочитать прежнюю форму записи, т. е. форму (4.49).

Рассмотрим в этом пространстве матричный оператор $\mathbf{P}$, имеющий следующую специальную структуру:

$$\mathbf{P}=\begin{Vmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{Vmatrix}. \tag{4.58}$$

Три вещественных числа x, y, z мы будем интерпретировать как координаты некоторой точки в трёхмерном пространстве. Пусть посредством матрицы Q рассматриваемая матрица P преобразуется следующим образом:

$$\mathsf{P}' = \mathsf{Q}\mathsf{P}\mathsf{Q}^{\dagger}. \tag{4.59}$$

Это соотношение вытекает из свойства унитарности матрицы Q, для которой эрмитовски сопряжённая матрица такова же, как обратная матрица Q^{-1}. Поэтому уравнение (4.59) просто описывает подобное преобразование матрицы P в случае, когда пространство *uv* подвергается унитарному преобразованию Q. Следует отметить, что матрица, эрмитовски сопряжённая с P, совпадает в данном случае с самой матрицей P. Такая матрица называется *самосопряжённой* или *эрмитовской*. Кроме того, сумма диагональных элементов матрицы P, известная под названием *шпур* или *след*, будет здесь равна нулю. Но можно показать, что оба эти свойства матрицы (то, что она является эрмитовской, и то, что её шпур равен нулю) сохраняются при подобном преобразовании (см. задачи в конце этой главы). Следовательно, матрица P' также должна быть эрмитовской и должна иметь шпур, обращающийся в нуль, что возможно только тогда, когда она имеет вид

$$\mathsf{P}' = \left\| \begin{matrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{matrix} \right\|, \tag{4.60}$$

где x', y', z' — вещественные числа. Далее, детерминант матрицы P также инвариантен в отношении подобного преобразования (4.59), и поэтому мы можем написать:

$$|\mathsf{P}| = -(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |\mathsf{P}'|.$$

Это соотношение является условием ортогональности; оно требует, чтобы длина вектора $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ оставалась неизменной при переходе от xyz к $x'y'z'$. Таким образом, мы видим, что каждой унитарной матрице Q в двумерном комплексном пространстве соответствует некоторое связанное с ней ортогональное преобразование в обычном действительном пространстве трёх измерений. Рассмотрим это соответствие более подробно. Пусть B будет вещественной ортогональной матрицей, преобразующей x в x', и пусть Q_1 будет соответствующей унитарной матрицей. Тогда будем иметь:

$$\mathsf{x}' = \mathsf{B}\mathsf{x}$$

и

$$\mathsf{P}' = \mathsf{Q}_1\mathsf{P}\mathsf{Q}_1^{\dagger}.$$

Пусть теперь совершается второе ортогональное преобразование, преобразующее x' в x'' с помощью матрицы A:

$$\mathsf{x}'' = \mathsf{A}\mathsf{x}'.$$

Тогда для соответствующей матрицы Q_2 будем иметь:

$$\mathsf{P}'' = \mathsf{Q}_2\mathsf{P}'\mathsf{Q}_2^{+}.$$

Рассмотрим теперь непосредственное преобразование x в x''. Оно производится матрицей C, равной

$$\mathsf{C} = \mathsf{AB},$$

а соответствующее преобразование P в P'' осуществляется посредством подобного преобразования с некоторой матрицей Q_3, которая должна соответствовать матрице C. Однако преобразование P в P'' описывается равенством

$$\mathsf{P}'' = \mathsf{Q}_2\mathsf{Q}_1\mathsf{P}\mathsf{Q}_1^{+}\mathsf{Q}_2^{+},$$

причём легко показать, что

$$\mathsf{Q}_1^{+}\mathsf{Q}_2^{+} = (\mathsf{Q}_2\mathsf{Q}_1)^{+}.$$

Тогда на основании того, что произведение двух унитарных матриц есть опять унитарная матрица, можно сделать вывод, что

$$\mathsf{Q}_3 = \mathsf{Q}_2\mathsf{Q}_1.$$

Таким образом, соответствие между комплексными унитарными матрицами второго порядка и вещественными матрицами третьего порядка таково, что каждое соотношение между матрицами одной системы будет справедливым и для соответствующих матриц другой системы. Две такие системы матриц называются *изоморфными*.

Элементы ортогональной матрицы A можно выразить через элементы изоморфной матрицы Q. Из (4.54) и (4.55) следует, что матрица, эрмитовски сопряжённая с Q, равна

$$\mathsf{Q}^{+} = \left\| \begin{matrix} \alpha^*\gamma^* \\ \beta^*\delta^* \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{matrix} \right\|.$$

Поэтому, введя для упрощения выкладок обозначения

$$x_+ = x + iy,$$
$$x_- = x - iy,$$

мы сможем записать матрицу P' в виде

$$\mathsf{P}' = \left\| \begin{matrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{matrix} \right\|,$$

или, после выполнения умножения:

$$\mathsf{P}' = \left\| \begin{matrix} (\alpha\delta + \beta\gamma)\, z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ & -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta + \beta\gamma)\, z + \alpha\gamma x_- - \beta\,\delta x_+ \end{matrix} \right\|. \tag{4.61}$$

Приравнивая теперь соответствующие элементы написанных матриц, мы получаем уравнения перехода от неподвижной координатной системы к подвижной:

$$\left.\begin{aligned} x'_+ &= 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+, \\ x'_- &= -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+, \\ z' &= (\alpha\delta + \beta\gamma) z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+. \end{aligned}\right\} \tag{4.62}$$

Наконец, желая выразить матричные элементы a_{ij} через α, β, γ и δ, мы можем сравнить уравнения (4.62) с общими уравнениями преобразования (4.14). Так, например, последнее из уравнений (4.62) можно написать в виде

$$z' = (\beta\delta - \alpha\gamma) x + i(\alpha\gamma + \beta\delta) y + (\alpha\delta + \beta\gamma) z.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$a_{31} = (\beta\delta - \alpha\gamma), \quad a_{32} = i(\alpha\gamma + \beta\delta), \quad a_{33} = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

Таким путём легко найти матрицу полного преобразования, которая будет иметь вид

$$\mathsf{A} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{Vmatrix}. \tag{4.63}$$

Эта матрица определяет ориентацию твёрдого тела, причём она выражена только через величины α, β, γ, δ. Следовательно, подобно углам Эйлера, эти четыре величины могут служить в качестве параметров, определяющих ориентацию твёрдого тела; они известны как *параметры Кэйли — Клейна* *). Вещественность элементов матрицы (4.63) следует из того, что матрица P является эрмитовской, но она может быть доказана и непосредственно, путём вычисления элементов этой матрицы с помощью соотношений (4.54), (4.55).

Параметры Кэйли — Клейна можно выразить через углы Эйлера с помощью непосредственного сравнения элементов (4.63) с элементами, выраженными через φ, θ и ψ. Однако проще и более поучительно образовать сначала матрицы Q_φ, Q_θ и Q_ψ, соответствующие последовательным вращениям, определяющим углы Эйлера, после чего их можно будет объединить в одну полную матрицу. Так,

---

*) Матрица (4.63) не совпадает с соответствующей матрицей, указанной, например, в книге Уиттекера, стр. 12. В сущности это произошло вследствие различного выбора начальной матрицы P. Ясно, что имеется много способов образования матрицы, детерминант которой равен $-r^2$, и поэтому специальный выбор такой матрицы является делом удобства. Матрица (4.58), которой мы здесь пользуемся, соответствует той форме, которую обычно применяют в квантовой механике.

например, при повороте на угол φ вокруг оси z мы для величин x_+, x_- и z будем иметь следующие формулы преобразования:

$$\begin{aligned} x'_+ &= e^{-i\varphi}x_+, \\ x'_- &= e^{-i\varphi}x_-, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Сравнивая эти формулы с формулами (4.62), мы видим, что этот поворот характеризуется следующими элементами матрицы $\mathbf{Q}$:

$$\gamma = \beta = 0, \quad \alpha^2 = e^{i\varphi}, \quad \delta^2 = e^{-i\varphi},$$

откуда

$$\mathbf{Q}_\varphi = \begin{Vmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{Vmatrix}. \tag{4.64}$$

Заметим, что элементы этой матрицы автоматически удовлетворяют условиям (4.54), (4.55), (4,57).

Следующий поворот совершается вокруг новой оси x на угол θ *против хода часовой стрелки*. Определение соответствующих элементов матрицы производится здесь аналогичным образом, но выкладки становятся при этом более утомительными. Поэтому мы просто выпишем эту матрицу, которая получается равной

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix}. \tag{4.65}$$

Для проверки этого достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} z\cos\theta - y\sin\theta & x - i(y\cos\theta + z\sin\theta) \\ x + i(y\cos\theta + z\sin\theta) & -z\cos\theta + y\sin\theta \end{Vmatrix},$$

правая часть которого описывает искомое преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\theta + z\sin\theta, \\ z' &= -y\sin\theta + z\cos\theta. \end{aligned}$$

Последний из поворотов, определяющий угол ψ, совершается опять вокруг оси z, и поэтому

$$\mathbf{Q}_\psi = \begin{Vmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{Vmatrix}. \tag{4.66}$$

В § 4.4 мы получили ортогональную матрицу полного преобразования в виде произведения матриц, соответствующих каждому из трёх этих поворотов. Но мы знаем, что вещественные ортогональные матрицы третьего порядка изоморфны с матрицами Q. Следовательно, матрица Q рассматриваемого полного преобразования будет равна произведению $\mathsf{Q}_\psi\mathsf{Q}_\theta\mathsf{Q}_\varphi$. Таким образом,

$$\mathsf{Q}=\mathsf{Q}_\psi\mathsf{Q}_\theta\mathsf{Q}_\varphi=\begin{Vmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2}\end{Vmatrix},$$

или

$$\mathsf{Q}=\begin{Vmatrix} e^{i(\psi+\varphi)/2}\cos\frac{\theta}{2} & ie^{i(\psi-\varphi)/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{-i(\psi-\varphi)/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\varphi)/2}\cos\frac{\theta}{2}\end{Vmatrix}. \tag{4.67}$$

Следовательно, параметры Кэйли — Клейна выражаются через углы Эйлера следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= e^{i(\psi+\varphi)/2}\cos\frac{\theta}{2}, & \beta &= ie^{i(\psi-\varphi)/2}\sin\frac{\theta}{2}, \\ \gamma &= ie^{-i(\psi-\varphi)/2}\sin\frac{\theta}{2}, & \delta &= e^{-i(\psi+\varphi)/2}\cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.68}$$

Заметим, что матрицу P можно представить в виде суммы

$$\mathsf{P}=x\sigma_x+y\sigma_y+z\sigma_z, \tag{4.69}$$

где σ_x, σ_y, σ_z — так называемые *спиновые матрицы Паули*:

$$\sigma_x=\begin{Vmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{Vmatrix},\quad \sigma_y=\begin{Vmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{Vmatrix},\quad \sigma_z=\begin{Vmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{Vmatrix}. \tag{4.70}$$

Эти матрицы вместе с единичной матрицей

$$\mathbf{1}=\begin{Vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{Vmatrix}$$

образуют систему четырёх независимых матриц. Поэтому любая квадратная матрица второго порядка, содержащая четыре произвольные величины, может быть представлена в виде их линейной комбинации. Матрицы Q, соответствующие вращениям вокруг координатных осей, выражаются через эти матрицы особенно просто. Например, матрицу Q_θ, соответствующую повороту вокруг оси x [формула (4.65)], можно записать в виде

$$\mathsf{Q}_\theta=\mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2}+i\sigma_x\sin\frac{\theta}{2}. \tag{4.71}$$

Аналогично, для матрицы $\mathbf{Q}_\varphi$, описывающей вращение вокруг оси z, будем иметь

$$\mathbf{Q}_\varphi = \left\| \begin{matrix} \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2} \end{matrix} \right\| = \mathbf{1}\cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_z \sin\frac{\varphi}{2}. \quad (4.72)$$

Легко видеть, что для вращения вокруг оси y получается матрица такого же вида, как (4.72), но вместо σ_z здесь будет стоять σ_y. Таким образом, все матрицы элементарных вращений имеют аналогичные выражения, в которые входят только единичная матрица $\mathbf{1}$ и соответствующие матрицы σ. Поэтому каждая спиновая матрица Паули связана с вращением вокруг некоторой оси и может рассматриваться как *оператор единичного поворота* вокруг этой оси.

Характерной чертой параметров Кэйли — Клейна и содержащих их матриц является постоянное присутствие в них половинных углов, и с этим связаны некоторые специфические свойства пространства uv. Например, в обычном пространстве поворот вокруг оси z на угол 2π просто воспроизводит первоначальную координатную систему. Если, например, в матрице $\mathbf{D}$ предыдущего параграфа положить $\varphi = 2\pi$, то будем иметь: $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, и $\mathbf{D}$ перейдёт в единичную матрицу $\mathbf{1}$, соответствующую тождественному преобразованию. С другой стороны, если ту же подстановку сделать в матрице $\mathbf{Q}_\varphi$ [формула (4.64)], то получим:

$$\mathbf{Q}_{2\pi} = \left\| \begin{matrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|,$$

что равно $-\mathbf{1}$, а не $\mathbf{1}$. Однако единичная матрица второго порядка (матрица $\mathbf{1}$) тоже должна соответствовать трёхмерному тождественному преобразованию. Следовательно, имеются две матрицы: $\mathbf{1}$ и $-\mathbf{1}$, соответствующие единичной квадратной матрице третьего порядка. Вообще, если матрица $\mathbf{Q}$ соответствует некоторой вещественной ортогональной матрице, то матрица $-\mathbf{Q}$ также будет ей соответствовать. Таким образом, мы здесь имеем тот случай изоморфизма между двумя системами матриц, при котором существует взаимно однозначное соответствие между одной матрицей третьего порядка и *парой* матриц $(\mathbf{Q}, -\mathbf{Q})$, а не одной матрицей $\mathbf{Q}$. В этом смысле можно сказать, что матрица $\mathbf{Q}$ есть *двузначная* функция соответствующей трёхмерной ортогональной матрицы.

Эта странность не нарушает наших общих построений. Как видно из изложенного, пространство uv является чисто математической конструкцией, созданной только для того, чтобы установить соответствие между определёнными классами квадратных матриц третьего и второго порядка. Нельзя поэтому требовать или ожидать, чтобы такое пространство имело свойства, подобные свойствам физического трёхмерного пространства. Нужно заметить, что изучению свойств пространства *uv* математики уделяли значительное внимание; двумерный комлексный вектор, построенный в этом пространстве, называют *спинором*. Оказывается, что в квантовой механике спинорное пространство несколько больше соответствует физической действительности; поэтому, чтобы учесть влияние «спина» электрона, нужно его волновую функцию или часть её представить в виде спинора. Действительно, половинные углы и свойство двузначности внутренне связаны с тем фактом, что спин полуцелый *). Впрочем, дальнейшее изложение этого вопроса увело бы нас слишком далеко от классической механики.

§ 4.6. Теорема Эйлера о движении твёрдого тела. Материал предыдущих параграфов даёт нам необходимый математический аппарат для описания движения твёрдого тела. Мы знаем, что ориентация твёрдого тела в некоторый момент времени может быть задана посредством ортогонального преобразования, элементы которого можно выразить через подходящую систему параметров. С течением времени ориентация этого тела будет меняться и, следовательно, матрица преобразования будет функцией времени, что можно записать в виде равенства $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$. Если оси, связанные с телом, выбраны так, что при $t = 0$ они совпадают с неподвижными осями, то в этот момент преобразование будет тождественным, и мы будем иметь:

$$\mathsf{A}(0) = \mathsf{1}.$$

В каждый следующий момент времени преобразование $\mathsf{A}(t)$ будет, вообще говоря, нетождественным, и так как физически реальное движение должно быть непрерывным, то матрица $\mathsf{A}(t)$ будет непрерывной функцией времени. Таким образом, рассматриваемое преобразование будет *начинаться с тождественного и затем непрерывно изменяться*.

При таком методе описания движения мы можем получить важные его характеристики, пользуясь лишь развитым выше математическим аппаратом. Одной из основных теорем здесь является так называемая *теорема Эйлера*, согласно которой *произвольное перемещение твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси*. Перейдём к её доказательству.

Если названную неподвижную точку принять за начало системы, связанной с телом, то перемещение твёрдого тела не вызовет смещения связанных с ним осей, а лишь изменит их ориентацию. Тогда согласно этой теореме систему осей, связанных с телом, можно

*) Хотя волновая функция при вращении может быть двузначной, однако все физические величины остаются, конечно, однозначными.

в каждый момент времени t получить посредством одного поворота начальной системы осей (которая совпадает с неподвижной системой координат). Иначе говоря, *операция*, которую выражает матрица A, описывающая перемещение этого твёрдого тела, является *вращением*. Но характерной чертой вращения является то, что при этой операции не изменяется одно из направлений, именно направление оси вращения. Поэтому любой вектор, направленный вдоль оси вращения, должен в начальной и конечной системах координат иметь пропорциональные составляющие. Другое необходимое условие, характеризующее вращение, состоит в том, что величины преобразуемых векторов при этом не изменяются. Это условие автоматически обеспечивается условиями ортогональности и, следовательно, для доказательства теоремы Эйлера достаточно показать, что существует вектор $\boldsymbol{R}$, имеющий одинаковые составляющие в обеих системах координат. Пользуясь матричной символикой, можно, таким образом, написать

$$\mathsf{R}' = \mathsf{AR} = \mathsf{R}. \tag{4.73}$$

Это уравнение является частным случаем более общего уравнения

$$\mathsf{R}' = \mathsf{AR} = \lambda \mathsf{R}, \tag{4.74}$$

в котором λ — некоторая постоянная, возможно комплексная. Значения λ, при которых уравнение (4.74) имеет отличные от нуля решения, называются характеристическими или *собственными значениями* матрицы A. Поэтому задачу об отыскании векторов, удовлетворяющих уравнению (4.74) называют задачей о собственных значениях данной матрицы. Векторы, удовлетворяющие этому уравнению, называют *собственными векторами* матрицы A. Таким образом, теорему Эйлера можно сформулировать в виде следующего утверждения: *одним из собственных значений вещественной ортогональной матрицы, определяющей движение твёрдого тела с одной неподвижной точкой, всегда является* $+1$.

Уравнение (4.74) можно записать в виде

$$(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{1})\,\mathsf{R} = 0, \tag{4.75}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) X + a_{12} Y + a_{13} Z &= 0, \\ a_{21} X + (a_{22} - \lambda) Y + a_{23} Z &= 0, \\ a_{31} X + a_{32} Y + (a_{33} - \lambda) Z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.76}$$

Уравнения (4.76) представляют систему трёх однородных уравнений относительно составляющих X, Y, Z собственного вектора $\boldsymbol{R}$. Поэтому они определяют эти составляющие лишь с точностью до их отношений. Физический смысл этого состоит в том, что однозначно определённым является только *направление* собственного вектора, а не его величина, так как при умножении собственного вектора на любую постоянную получается опять собственный вектор. Во всяком случае, будучи однородными, уравнения (4.76) могут иметь нетривиальное решение только тогда, когда детерминант, составленный из их коэффициентов, равен нулю. Таким образом, мы получаем уравнение

$$|\mathsf{A}-\lambda\mathsf{1}| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.77}$$

Уравнение (4.77) известно под названием *характеристического* или *векового* уравнения матрицы A; корнями его являются искомые собственные значения. Следовательно, теорема Эйлера сводится к утверждению, что для рассматриваемых вещественных ортогональных матриц характеристическое уравнение должно иметь корень $\lambda=+1$.

В общем случае характеристическое уравнение имеет три корня, и им соответствуют три собственных вектора. Мы часто будем для удобства писать X_1, X_2, X_3 вместо X, Y, Z. В этих обозначениях составляющие собственных векторов можно записать в виде X_{ik}, где первый индекс обозначает номер составляющей собственного вектора, а второй — номер самого собственного вектора. Тогда каждое из уравнений (4.76) можно будет записать в виде

$$\sum_j a_{ij}X_{jk} = \lambda_k X_{ik}$$

или

$$\sum_j a_{ij}X_{jk} = \sum_j X_{ij}\delta_j\lambda_k. \tag{4.78}$$

Каждая часть уравнения (4.78) имеет вид элемента матрицы являющейся произведением двух матриц: левая часть — произведением матрицы A на матрицу X с элементами X_{jk}, а правая — произведением матрицы X на матрицу с элементами $\delta_{jk}\lambda_k$. Последняя матрица является диагональной и её элементы суть собственные значения матрицы A. Обозначив эту матрицу через $\boldsymbol{\lambda}$, будем иметь:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}, \tag{4.79}$$

и тогда уравнения (4.78) можно будет записать в виде матричного уравнения

$$\mathsf{AX} = \mathsf{X}\boldsymbol{\lambda}$$

или, умножая слева на X^{-1},

$$\mathsf{X}^{-1}\mathsf{AX} = \boldsymbol{\lambda}. \tag{4.80}$$

Левая часть этого уравнения написана в форме матрицы, подобной матрице A. [Чтобы привести её к виду (4.41), нужно обозначить X^{-1} через Y.] Таким образом, уравнение (4.80) позволяет следующим образом сформулировать задачу об отыскании собственных значений матрицы: нужно найти такую матрицу, которая преобразовывает данную матрицу A в диагональную. Элементы полученной диагональной матрицы будут тогда искомыми собственными значениями.

Докажем теперь несколько простых лемм, касающихся собственных значений матрицы.

1. *Модуль каждого собственного значения равен единице.*

Это утверждение следует из ортогональности матрицы A. Следует заметить, что, хотя все элементы матрицы A являются вещественными, однако корни характеристического уравнения могут, очевидно, быть комплексными. В этом случае соответствующие собственные векторы также будут комплексными, и в реальном физическом пространстве такому вектору не будет соответствовать никакой образ. Величина комплексного вектора определяется не суммой квадратов его составляющих, а суммой квадратов *модулей* его составляющих. Поэтому можно написать:

$$|X|^2+|Y|^2+|Z|^2=\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{R}=|\boldsymbol{R}|^2. \tag{4.81}$$

Но вследствие ортогональности рассматриваемой матрицы модуль комплексного вектора $\boldsymbol{R}$ не должен изменяться во время преобразования. Поэтому будем иметь:

$$\boldsymbol{R}^{*\prime}\cdot\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{R}.$$

Но если $\boldsymbol{R}$ является собственным вектором, то

$$\boldsymbol{R}^{*\prime}\cdot\boldsymbol{R}'=\lambda^*\lambda\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{R},$$

и следовательно,

$$\lambda^*\lambda=1, \tag{4.82}$$

что и требовалось доказать. Конечно, эта лемма ничего не говорит об аргументе числа λ.

2. *Если ортогональная квадратная матрица третьего порядка является вещественной, то по крайней мере одно из её собственных значений также является вещественным.*

Характеристическое уравнение (4.77) является кубическим уравнением вида

$$\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0, \tag{4.83}$$

и так как матрица A является вещественной, то все его коэффициенты тоже будут вещественными. Но при больших отрицательных λ левая часть уравнения (4.83) будет отрицательной, а при больших положительных λ она будет положительной. Следовательно, график функции, изображаемой этим кубическим полиномом, должен по крайней мере один раз пересекать ось абсцисс между $\lambda = -\infty$ и $\lambda = +\infty$, что и доказывает данную лемму. Согласно лемме 1 этот вещественный корень может быть равен только $+1$ или -1.

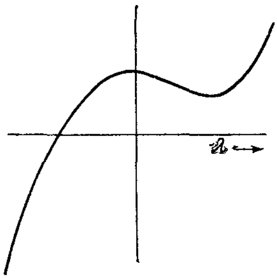

Рис. 43. График функции, стоящей в левой части уравнения (4.83).

Детерминант матрицы $\boldsymbol{\lambda}$ равен произведению трёх собственных значений λ_1, λ_2, λ_3. Но так как детерминант любой матрицы инвариантен в отношении подобных преобразований, то это произведение равно также детерминанту матрицы A:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\mathbf{A}|.$$

Следовательно, оно может иметь только два значения: $+1$ или -1. Лемма 3, которую мы сейчас докажем, устанавливает, что значение -1 должно быть исключено.

3. *Произведение корней векового детерминанта должно при всех возможных перемещениях твёрдого тела быть равным* $+1$.

Рассмотрим простейшую матрицу с детерминантом, равным -1:

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = -1.$$

Преобразование S изменяет знак каждой из составляющих вектора. Можно также сказать, что оно изменяет направления координатных осей на противоположные (рис. 44) и превращает правую систему координат в левую; оно известно как *инверсия*.

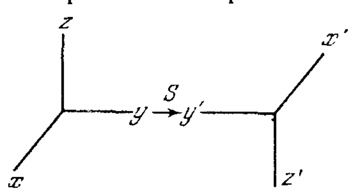

Рис. 44. Инверсия координатных осей.

Так как эта операция преобразует правую систему координат в левую, то ясно, что инверсия не может быть осуществлена посредством поворота системы координатных осей как *твёрдого тела*. Поэтому инверсия не соответствует никакому реальному физическому перемещению твёрдого тела.

Всё то, что верно для матрицы $\mathbf{S}$, в равной мере верно и для любой матрицы, детерминант которой равен -1, так как каждую такую матрицу можно представить как произведение матрицы $\mathbf{S}$ на некоторую матрицу, детерминант которой равен $+1$. Следовательно, такая матрица включает в себя операцию инверсии и поэтому не может описывать поворот системы координат как твёрдого тела. Стало быть, преобразования, описывающие движение твёрдого тела, должны быть ограничены матрицами, имеющими детерминант, равный $+1$.

Другое доказательство этой леммы основывается на том факте, что матрица рассматриваемого преобразования может быть получена посредством непрерывного изменения единичной матрицы, детерминант которой, разумеется, равен $+1$. Поэтому было бы несовместимо с непрерывностью движения, если бы детерминант этой матрицы изменялся в некоторый момент времени скачком, от значения $+1$ до значения -1 *).

Теперь нам потребуется ещё одна лемма.

4. *Число, комплексно сопряжённое собственному значению, есть также собственное значение.*

Это утверждение непосредственно следует из вещественности коэффициентов векового уравнения (4.83). Действительно, если λ есть некоторое решение уравнения (4.83), то, образовав уравнение, комплексно сопряжённое уравнению (4.83), мы увидим, что λ^* есть решение того же самого уравнения. Таким образом, комплексные собственные значения всегда входят попарно и являются комплексно сопряжёнными по отношению друг к другу.

Доказав эти четыре леммы, мы можем перейти к доказательству теоремы Эйлера. Рассмотрим для этого возможные собственные значения вещественной ортогональной матрицы с детерминантом, равным $+1$. Прежде всего заметим, что все эти три числа не могут быть вещественными и различными, так как вещественные корни характеристического уравнения могут быть равными лишь $+1$ или -1. Далее, если все эти корни будут вещественными и два из них будут равными, то третий корень непременно будет равен $+1$, так как иначе детерминант матрицы не будет равен $+1$. Исключая, далее, тривиальный случай, когда все три корня равны $+1$ (что соответствует тождественному преобразованию), мы видим, что единственной остающейся ещё возможностью является существование одного вещественного корня и двух комплексных. Но два комплексных корня всегда являются сопряжёнными и их произведение равно $+1$. Следовательно, третий корень должен быть в этом случае равен $+1$, так как в противном случае мы не получим нужной величины детерминанта. Таким образом, при любом *нетривиальном физическом преобразовании рассматриваемого типа имеется одно собственное значение* $+1$, что и утверждает теорема Эйлера.

Направляющие косинусы оси вращения можно получить теперь, полагая в уравнениях (4.76) $\lambda = 1$ и разрешая их относительно

*) Ортогональные преобразования с детерминантом, равным -1, называют несобственными вращениями в отличие от преобразований с детерминантом $+1$, которые согласно теореме Эйлера являются собственными вращениями.

X, Y, Z *). Угол поворота Φ также может быть найден без особого труда. Для этого представим себе, что мы перешли к системе координат, в которой ось z направлена вдоль оси вращения. В этой системе мы вместо матрицы A будем иметь матрицу A', описывающую поворот оси z на угол Φ. Эта матрица имеет вид:

$$\mathsf{A}' = \begin{Vmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

След матрицы A' (см. § 4.5) равен

$$1 + 2\cos\Phi,$$

и так как след матрицы инвариантен относительно подобных преобразований, то матрица A должна иметь тот же след. Таким образом, мы получаем равенство

$$\sum_i a_{ii} = 1 + 2\cos\Phi, \tag{4.84}$$

определяющее угол поворота через элементы матрицы. Выражая, например, элементы a_{ii} через углы Эйлера, мы можем получить угол поворота Φ как функцию углов φ, θ, ψ, являющихся углами последовательных вращений.

Непосредственным следствием теоремы Эйлера является *теорема Шаля*, согласно которой *произвольное перемещение твёрдого тела в пространстве является поступательным перемещением плюс вращение*. Подробное доказательсто этой теоремы вряд ли является необходимым. Она вытекает из того простого факта, что в случае уничтожения связи, удерживающей одну точку тела неподвижной, появляются три степени свободы для начала координат системы, связанной с телом.

§ 4.7. Бесконечно малые повороты. Целесообразно попытаться установить соответствие между векторами и конечными поворотами, описываемыми ортогональными матрицами. Вектор, который мы поставим в соответствие некоторому повороту, должен, конечно, иметь определённое направление — направление оси вращения и определённую величину, например равную углу поворота. Мы сейчас увидим, что успешно осуществить такое соответствие оказывается

---

*) Если некоторые корни векового уравнения являются кратными, то соответствующие собственные векторы нельзя найти таким простым путём (см. §§ 5.4 и 10.2). Действительно, если не все собственные значения матрицы общего вида являются различными, то её не всегда можно диагонализировать. Однако здесь нас это не должно беспокоить, потому что, как показывает теорема Эйлера, у каждой нетривиальной ортогональной матрицы корень $+1$ является простым.

невозможным. Предположим, что A и B будут двумя такими «векторами», связанными с преобразованиями A и B. Тогда, поскольку это векторы, они должны обладать свойством коммутативности при сложении, т. е. для них должно выполняться равенство

$$A + B = B + A.$$

Но сложение двух вращений, т. е. последовательное выполнение одного из них за другим, описывается, как мы знаем, произведением

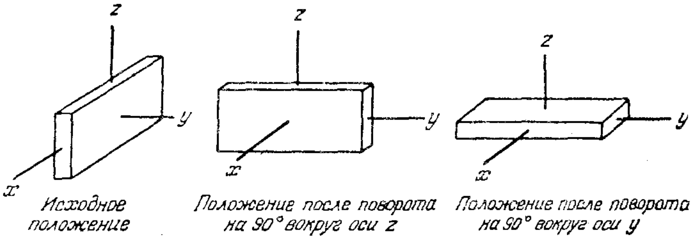

Рис. 45. Последовательные повороты вокруг осей z и y.

матриц AB, и это умножение не коммутативно, т. е. $\mathsf{AB} \neq \mathsf{BA}$. Следовательно, векторы A и B не будут обладать коммутативностью сложения и поэтому их нельзя будет считать в полном смысле слова

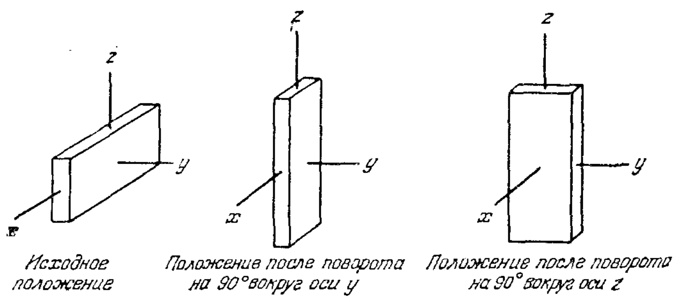

Рис. 46. Повороты вокруг осей y и z, выполненные в порядке, обратном тому, который изображён на рис. 45.

векторами. Тот факт, что сумма конечных вращений зависит от их порядка, очень хорошо иллюстрируется простым примером, изображённым на рис. 45 и 46. На первом из них показан поворот призмы на 90° вокруг оси z, а затем на 90° вокруг оси y, а на втором — те же вращения, но совершаемые в обратном порядке. Конечные результаты, как видно из рис. 45 и 46, получаются различными.

Хотя конечное вращение нельзя представить некоторым вектором, однако это препятствие отпадает, если рассматривать лишь *бесконечно малые вращения*. Бесконечно малый поворот представляет собой такое ортогональное преобразование, при котором составляющие каждого вектора изменяются бесконечно мало. Так, например, если $\boldsymbol{r}$ — некоторый вектор, а x_1 — одна из его составляющих, то x_1' будет иметь практически такую же величину, как x_1, и поэтому можно написать:

$$x_1' = x_1 + \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3. \tag{4.85}$$

Матричные элементы ε_{11}, ε_{12} и т. д. следует рассматривать как бесконечно малые, и во всех последующих выкладках следует сохранить только те величины, которые не являются малыми более высокого порядка, нежели ε_{ij}. Уравнения бесконечно малого преобразования могут быть записаны в виде

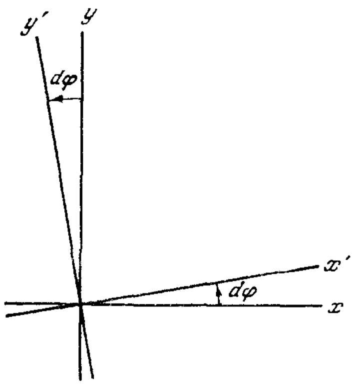

Рис. 47. Бесконечно малый поворот вокруг оси z.

$$x_i' = x_i + \sum_j \varepsilon_{ij}x_j,$$

или

$$x_i' = \sum_j (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\, x_j. \tag{4.86}$$

Если величины δ_{ij} рассматривать как элементы единичной матрицы, то уравнения (4.86) можно будет записать в матричной форме

$$\mathsf{x}' = (\mathsf{1} + \varepsilon)\,\mathsf{x}. \tag{4.87}$$

Уравнение (4.87) показывает, что матрица бесконечно малого преобразования имеет вид $\mathsf{1} + \varepsilon$, т. е. описывает почти тождественное преобразование, отличающееся от него лишь бесконечно малым оператором.

Теперь можно показать, что при бесконечно малых преобразованиях последовательность операций не существенна, т. е. что эти преобразования *коммутативны*. Пусть $\mathsf{1} + \varepsilon_1$ и $\mathsf{1} + \varepsilon_2$ суть два бесконечно малых преобразования. Тогда произведение $(\mathsf{1} + \varepsilon_1)\,(\mathsf{1} + \varepsilon_2)$ будет равно

$$(\mathsf{1} + \varepsilon_1)(\mathsf{1} + \varepsilon_2) = \mathsf{1}^2 + \varepsilon_1\mathsf{1} + \mathsf{1}\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = \mathsf{1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{4.88}$$

(с точностью до малых более высокого порядка). Но произведение тех же преобразований, взятых в обратном порядке, можно получить из (4.88) посредством перемены мест ε_1 и ε_2, что не окажет влияния на окончательный результат, так как сложение матриц коммутативно. Следовательно, бесконечно малые преобразования являются коммутативными, что устраняет возражение против представления их с помощью векторов.

Если $\mathsf{A} = \mathsf{1} + \varepsilon$ есть матрица бесконечно малого преобразования, то обратная ей матрица будет равна

$$\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{1} - \varepsilon. \tag{4.89}$$

Доказательство этого положения следует из равенства

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = (\mathsf{1} + \varepsilon)(\mathsf{1} - \varepsilon) = \mathsf{1},$$

согласующегося с определением обратной матрицы в форме (4.32).

Понятие бесконечно малого преобразования можно сделать более наглядным, если рассмотреть специальный случай такого преобразования — бесконечно малое вращение вокруг оси z. Для *конечного* вращения вокруг этой оси матрица преобразования имеет вид [см. (4.43)]

$$\mathsf{A} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

и, чтобы получить отсюда матрицу бесконечно малого вращения, нужно заменить угол φ на бесконечно малый угол $d\varphi$ и пренебречь величинами выше первого порядка малости. Тогда получим:

$$\mathsf{1} + \varepsilon = \begin{Vmatrix} 0 & d\varphi & 0 \\ -d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда для бесконечно малой матрицы ε будем иметь:

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} 0 & d\varphi & 0 \\ -d\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = d\varphi \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (4.90)$$

Заметим, что диагональные элементы матрицы ε равны нулю, а отличные от нуля элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, отличаются друг от друга лишь знаком. Такие матрицы называются *антисимметричными* или *кососимметричными*. Это свойство присуще не только той частной матрице, которую мы сейчас рассматривали, а каждой матрице ε бесконечно малого вращения. Действительно, согласно (4.89) матрица A^{-1} равна $\mathsf{1} - \varepsilon$. Но при ортогональном преобразовании обратная матрица A^{-1} совпадает с транспонированной матрицей $\tilde{\mathsf{A}}$, равной $\mathsf{1} + \tilde{\varepsilon}$. Следовательно,

$$\varepsilon = -\tilde{\varepsilon},$$

или

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji},$$

что является определением антисимметричной матрицы *).

Так как диагональные элементы антисимметричной матрицы всегда равны нулю, то в такой матрице третьего порядка могут быть лишь три различных элемента. Следовательно, не нарушая общности, мы можем записать матрицу ε в виде

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.91}$$

Ясно, что величины $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ можно рассматривать как три независимых параметра, определяющих рассматриваемое вращение. Покажем теперь, что эти три величины являются составляющими некоторого вектора.

Приращения, которые получают составляющие вектора при бесконечно малом преобразовании, определяются матричным уравнением

$$\mathsf{x}' - \mathsf{x} = d\mathsf{x} = \varepsilon\mathsf{x}, \tag{4.92}$$

которое после подстановки ε из (4.91) приобретает следующий развёрнутый вид:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= x_2\,d\Omega_3 - x_3\,d\Omega_2, \\ dx_2 &= x_3\,d\Omega_1 - x_1\,d\Omega_3, \\ dx_3 &= x_1\,d\Omega_2 - x_2\,d\Omega_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.93}$$

Правая часть каждого из написанных здесь равенств представляет одну из составляющих векторного произведения $\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{\Omega}$, где $d\boldsymbol{\Omega}$ — вектор, составляющие которого равны $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$. Поэтому соотношения (4.93) можно представить в виде векторного равенства

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{\Omega}. \tag{4.94}$$

Однако представления равенств (4.93) в векторной форме ещё не достаточно для доказательства того, что $d\boldsymbol{\Omega}$ есть вектор. Основным аргументом здесь является наличие у $d\boldsymbol{\Omega}$ известных свойств при выполнении над ним ортогонального преобразования. Поэтому, если

*) Мы считаем, не оговаривая этого специально, что бесконечно малое ортогональное преобразование является вращением. По своему смыслу это утверждение является очевидным, так как «бесконечно малая инверсия» есть понятие, противоречащее самому себе. Формально указанное утверждение вытекает из антисимметричности матрицы ε, так как вследствие этого все диагональные элементы матрицы $1+\varepsilon$ будут с точностью до величин высшего порядка малости равны единице. Поэтому детерминант такого преобразования будет равен $+1$, что является признаком вращения.

$d\mathbf{\Omega}$ действительно есть вектор, то под действием ортогональной матрицы B его составляющие должны преобразовываться согласно уравнениям

$$d\Omega'_i = \sum_l b_{il}\, d\Omega_l. \tag{4.95}$$

Но величины $d\Omega_l$ были введены нами как элементы антисимметричной матрицы, и совсем не очевидно, что элементы этой матрицы будут преобразовываться согласно уравнениям (4.95). Как мы увидим позже, формальный вывод уравнений преобразования для составляющих $d\Omega_l$ оказывается довольно сложным. Однако имеется несколько простых соображений, показывающих, что $d\mathbf{\Omega}$ в основном «выдерживает» эти «испытания на вектор», хотя в одном отношении он здесь терпит неудачу.

При ортогональном преобразовании координат посредством матрицы B уравнение (4.92) принимает вид

$$d\mathsf{x}' = \varepsilon'\mathsf{x}', \tag{4.92'}$$

где $d\mathsf{x}'$ и x' — преобразованные матрицы, состоящие из одного столбца, а ε' — матрица, получающаяся из матрицы ε посредством подобного преобразования с помощью матрицы B:

$$\varepsilon' = \mathsf{B}\varepsilon\mathsf{B}^{-1}.$$

Можно доказать, что свойство антисимметричности сохраняется при подобном преобразовании посредством ортогональной матрицы (см. задачу 3 в конце этой главы). Следовательно, матрица ε' также является антисимметричной с тремя элементами $d\Omega'_1$, $d\Omega'_2$, $d\Omega'_3$. Поэтому равенство (4.92′) можно записать в таком же виде, как и равенство (4.93). Проделав это, мы придём к векторному соотношению

$$d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}' \times d\mathbf{\Omega}', \tag{4.94'}$$

аналогичному соотношению (4.94). Таким образом, элементы антисимметричной матрицы образуют вектор *во всех* декартовых системах координат, и поэтому они должны преобразовываться подобно составляющим вектора.

Посмотрим, однако, как ведут себя уравнения (4.93) при инверсии S (см. § 4.6). Составляющие векторов $\boldsymbol{r}$ и $d\boldsymbol{r}$, очевидно, изменяют при этом свой знак, и если вектор $d\mathbf{\Omega}$ действительно является вектором, то то же самое должно произойти и с его составляющими. Но уравнения (4.93) сохраняют свою форму во всех координатных системах, что может иметь место лишь в том случае, когда составляющие вектора $d\mathbf{\Omega}$ не меняют своего знака. Таким образом, $d\mathbf{\Omega}$ обладает всеми свойствами вектора, за исключением свойств, связанных с его поведением при несобственном вращении.

Этот вывод можно проверить с помощью уравнений преобразования для $d\mathbf{\Omega}$, которые мы сейчас получим. Формально величины $d\Omega_i$ связаны с элементами матрицы ε соотношением

$$d\Omega_i = \frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^{3} \delta_{ijk}\varepsilon_{jk}, \tag{4.96}$$

где δ_{ijk} — *символ Леви-Чивита*, равный нулю, если среди индексов i, j, k имеются одинаковые, и равный $+1$ или -1 в зависимости от чётности или нечётности перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}.$$

Например, при $i=1$ все члены написанной суммы обращаются в нуль, за исключением членов, для которых $j=2$, $k=3$ или $j=3$, $k=2$. При этом значении i формула (4.96) будет состоять только из двух членов и примет вид

$$d\Omega_1 = \frac{1}{2}(\delta_{123}\varepsilon_{23} + \delta_{132}\varepsilon_{32}).$$

Согласно определению здесь $\delta_{123}=1$, а $\delta_{132}=-1$. Но так как $\varepsilon_{32}=-\varepsilon_{23}$, то окончательно будем иметь:

$$d\Omega_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{23}) = \varepsilon_{23},$$

что согласуется с (4.91).

Аналогично, составляющие $d\Omega'_i$, являющиеся составляющими вектора $d\mathbf{\Omega}$ в новой системе координат, можно записать в виде

$$d\Omega'_i = \frac{1}{2} \sum_{j,\,k} \delta_{ijk}\varepsilon'_{jk}.$$

Так как $\mathsf{B}^{-1} = \tilde{\mathsf{B}}$, то преобразованные матричные элементы ε'_{jk} связаны с элементами ε_{mn} равенствами

$$\varepsilon'_{jk} = \sum_{m,\,n} b_{jm}\varepsilon_{mn}b_{kn},$$

и поэтому $d\Omega'_i$ можно представить в виде

$$d\Omega'_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,\,k \\ m,\,n}} \delta_{ijk}b_{jm}b_{kn}\varepsilon_{mn}.$$

Пользуясь символом Леви-Чивита, можно выразить также ε_{mn} через $d\Omega_l$:

$$\varepsilon_{mn} = \sum_{l} \delta_{lmn}\, d\Omega_l,$$

и поэтому составляющие $d\Omega'$ будут выражаться через составляющие $d\Omega$ следующим образом:

$$d\Omega'_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,\, k,\, l \\ m,\, n}} \delta_{ijk}\delta_{lmn}b_{jm}b_{kn}\, d\Omega_l.$$

Покажем теперь, что суммирование по j, k, m и n приводит к следующему простому результату:

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{j,\, k \\ m,\, n}} \delta_{ijk}\delta_{lmn}b_{jm}b_{kn} = b_{il}\,|\,\mathsf{B}\,|. \tag{4.97}$$

Доказательство этого основывается на следующем выражении для величины детерминанта:

$$\sum_{l,\, m,\, n} \delta_{lmn}b_{il}b_{jm}b_{kn} = |\,\mathsf{B}\,|,$$

где i, j, k — числа, получающиеся с помощью чётной, т. е. циклической, перестановки чисел 1, 2, 3. Если же i, j, k будут образовывать нечётную перестановку чисел 1, 2, 3, соответствующую нечётному числу перемен мест, то эта сумма будет отличаться от детерминанта $|\,\mathsf{B}\,|$ только знаком. Поэтому

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{j,\, k \\ l,\, m,\, n}} \delta_{ijk}\delta_{lmn}b_{il}b_{jm}b_{kn} = |\,\mathsf{B}\,|.$$

Но из ортогональности матрицы B следует тождество

$$\sum_l b_{il}^2 = 1\,,$$

которое можно ввести в правую часть предыдущего равенства. Проделав это, получим

$$\sum_l b_{il} \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,\, k \\ m,\, n}} \delta_{ijk}\delta_{lmn}b_{jm}b_{kn} = \sum_l b_{il}\,(b_{il}\,|\,\mathsf{B}\,|).$$

Наконец, так как величины b_{il} являются элементами произвольной ортогональной матрицы, то тождество (4.97) можно считать установленным. Учитывая это, мы получаем следующие уравнения преобразования для $d\Omega_i$:

$$d\Omega'_i = |\,\mathsf{B}\,| \sum_l b_{il}\, d\Omega_l. \tag{4.98}$$

Преобразование (4.98) почти совпадает с линейным преобразованием (4.95), которое можно было предположить априори; разница между ними лишь в коэффициенте $|\,\mathsf{B}\,|$. Поэтому для собственных вращений эти преобразования совпадают полностью, но если преобразование B содержит инверсию, то детерминант $|\mathsf{B}|$ вносит в уравнения (4.98) добавочный знак минус. Этот вывод полностью совпадает с тем, который был получен ранее с помощью менее строгих рассуждений. Векторы, преобразующиеся согласно уравнениям (4.98), известны как *псевдовекторы*. Следует заметить, что бесконечно малым характером матрицы $\mathfrak{e}$ мы нигде в этом доказательстве не пользовались, а исходили лишь из свойств её симметричности. Следовательно, элементы любой атисимметричной матрицы третьего порядка образуют составляющие псевдовектора.

Хотя в этом смысле $d\boldsymbol{\Omega}$ и не вполне является вектором, однако в большинстве случаев это отступление не имеет значения. Известно, что многие величины, которые обычно считаются векторными, часто наталкиваются на эту «преграду». Так, например, любое векторное произведение двух обычных векторов нужно считать псевдовектором, так как составляющие произведения $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ равны

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j,$$

где $i=1, 2, 3$, а j и k следуют за i в циклическом порядке. Но при инверсии составляющие векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ меняют свой знак, и следовательно, знак $\boldsymbol{C}$ при этом не изменяется, что указывает на то, что это псевдовектор. Примерами псевдовекторов могут служить кинетический момент $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ и напряжённость магнитного поля. Скалярное произведение псевдовектора на вектор называется *псевдоскаляром*. В то время как истинный скаляр вполне инвариантен относительно ортогональных преобразований, псевдоскаляр изменяет свой знак при любом несобственном вращении.

Когда в начале этого параграфа ставился вопрос о связи вектора с поворотом, считалось очевидным, что направление этого вектора должно совпадать с направлением оси вращения, а его величиной должен быть угол поворота. При этом было установлено, что в случае конечных поворотов такой вектор построить нельзя, но в случае бесконечно малых поворотов эта трудность отпадает, так как, описывая эти повороты с помощью матриц, мы приходим к векторам $d\boldsymbol{\Omega}$, определяющим эти повороты. Теперь мы можем показать, что величина вектора $d\boldsymbol{\Omega}$ и его направление совпадают с теми, которые мы предполагали вначале, когда говорили о векторах конечных вращений.

Из формулы (4.94) видно, что влиянию рассматриваемого бесконечно малого преобразования не подвергаются лишь те векторы, которые параллельны $d\boldsymbol{\Omega}$. Однако известно, что векторы, не изменяющиеся при вращении, должны быть направлены вдоль оси этого вращения, следовательно, эта ось направлена так же, как $d\boldsymbol{\Omega}$. Что касается величины вектора $d\boldsymbol{\Omega}$, то её легко найти с помощью матрицы $\mathfrak{e}$ в случае, когда ось z совпадает с осью вращения. Сравнивая формулы (4.90) и (4.91), мы видим, что величина вектора $d\boldsymbol{\Omega}$

будет в этом случае равна углу поворота $d\varphi$. Но так как величина вектора (или псевдовектора) инвариантна относительно ортогональных преобразований, то $|d\mathbf{\Omega}|$ будет совпадать с углом поворота в любой координатной системе.

Можно рассуждать иначе. Пусть $d\mathbf{\Omega}$ обозначает вектор, направленный вдоль оси вращения и равный по величине углу поворота. Тогда, несомненно, будет справедливо уравнение (4.94), в чём можно убедиться с помощью элементарного доказательства. Рассмотрим, например, изменение вектора $\boldsymbol{r}$ при вращении его вокруг оси z на малый угол $d\Omega$ по ходу часовой стрелки (процедура, соответствующая вращению системы координат против хода часовой стрелки). Из рис. 48 видно, что с точностью до величин высшего порядка малости относительно $d\Omega$ величина $|d\boldsymbol{r}|$ равна

$$|d\boldsymbol{r}| = r \sin\theta \, d\Omega,$$

что совпадает с $|\boldsymbol{r} \times d\mathbf{\Omega}|$. Кроме того $d\boldsymbol{r}$ должно быть перпендикулярно к $d\mathbf{\Omega}$ и $\boldsymbol{r}$. Направление этого вектора видно из рис. 48.

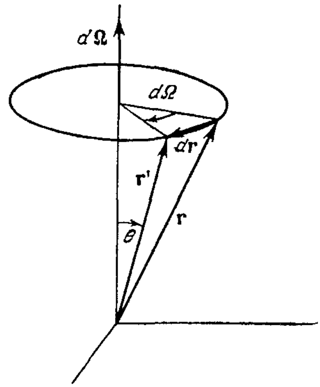

Рис. 48. Изменение вектора при бесконечно малом повороте.

Из того факта, что бесконечно малое ортогональное преобразование можно записать в форме (4.94), вытекает также доказательство теоремы Эйлера, не зависящее от доказательства, изложенного ранее. Действительно, любое конечное перемещение твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить с помощью последовательных бесконечно малых перемещений. Но так как бесконечно малое преобразование является вращением, то и конечное преобразование также будет вращением.

§ 4.8. Скорость изменения вектора. Понятие бесконечно малого поворота даёт мощный инструмент для описания движения твёрдого тела. Рассмотрим какой-нибудь вектор $\boldsymbol{G}$, например радиус-вектор материальной точки или вектор кинетического момента. В процессе движения такой вектор обычно изменяется и изменение его часто зависит от координатной системы, в которой производится наблюдение этого вектора. Возьмём, например, систему координат, связанную с твёрдым телом, и рассмотрим вектор, идущий из начала координат этой системы в некоторую точку тела. Ясно, что в системе координат, связанной с этим телом, такой вектор будет постоянным. Однако наблюдатель, связанный с неподвижной системой координат, будет считать, что составляющие этого вектора изменяются в процессе движения тела.

Рассмотрим приращения, которые получают за время dt составляющие произвольного вектора $\boldsymbol{G}$. В системе координат, связанной с телом, эти приращения будут отличаться от соответствующих приращений в неподвижной системе координат, и это отличие вызывается только вращением системы, связанной с телом. Символически это можно записать так:

$$(d\boldsymbol{G})_{\text{тело}} = (d\boldsymbol{G})_{\text{пространство}} + (d\boldsymbol{G})_{\text{вращение}}.$$

Но приращения составляющих вектора вследствие бесконечно малого вращения координатных осей определяются равенством (4.94). Следовательно,

$$(d\boldsymbol{G})_{\text{вращение}} = \boldsymbol{G} \times d\boldsymbol{\Omega},$$

откуда получаем следующее соотношение между дифференциалом $d\boldsymbol{G}$ в неподвижной системе координат и дифференциалом $d\boldsymbol{G}$, наблюдаемым в системе, связанной с телом:

$$(d\boldsymbol{G})_{\text{пространство}} = (d\boldsymbol{G})_{\text{тело}} + d\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{G}. \tag{4.99}$$

Скорость изменения вектора $\boldsymbol{G}$ получается посредством деления (4.99) на дифференциал времени dt:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}\right)_{\text{пространство}} = \left(\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}\right)_{\text{тело}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G}. \tag{4.100}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}, \tag{4.101}$$

т. е. мгновенная угловая скорость вращения тела. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси бесконечно малого поворота, совершающегося в момент t. Эта ось называется *мгновенной осью вращения*.

Равенство (4.100) следует рассматривать не как формулу, относящуюся к какому-нибудь конкретному вектору $\boldsymbol{G}$, а скорее как уравнение преобразования производной по времени при переходе от одной системы координат к другой. На вектор $\boldsymbol{G}$, который мы здесь дифференцируем, не было наложено никаких условий. Произвольность этого вектора можно подчеркнуть, записав уравнение (4.100) в операторной форме

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{пространство}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{тело}} + \boldsymbol{\omega} \times \quad . \tag{4.102}$$

Как и всякое векторное равенство, уравнение (4.100) можно спроектировать на оси любой системы координат. Рассмотрим, например, вектор

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}\right)_{\text{пространство}}.$$

Он представляет скорость изменения вектора G, *наблюдаемую в неподвижной системе координат*. Но если вектор F уже получен, то его составляющие можно вычислить для любой системы осей, даже для движущейся, что часто оказывается удобным. Однако здесь следует соблюдать осторожность: когда производится проектирование на движущиеся оси, проекция F_x оказывается *неравной* производной

$$\left(\frac{dG_x}{dt}\right)_{\text{пространство}}.$$

Например, скорость изменения вращающегося вектора $\boldsymbol{r}$, наблюдаемая в неподвижной системе координат, есть некоторый вектор $\boldsymbol{v}$, определяемый равенством (4.94). При этом составляющие вектора $\boldsymbol{v}$ по осям системы, вращающейся вместе с $\boldsymbol{r}$, будут, вообще говоря, отличными от нуля. С другой стороны, составляющие самого вектора $\boldsymbol{r}$ будут в этой системе постоянны и их производные по времени будут равны нулю (независимо от того, в какой системе находится наблюдатель). Таким образом, если производную вектора по времени мы берём в одной системе координат, то вычислять её составляющие в другой системе нужно лишь *после* того, как будет выполнено дифференцирование этого вектора.

Вектор кинетического момента часто удобно выражать через углы Эйлера и их производные по времени. Для этого бесконечно малый поворот, связанный с $\boldsymbol{\omega}$, следует рассматривать как совокупность трёх последовательных бесконечно малых поворотов с угловыми скоростями $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\psi = \dot{\psi}$. Тогда в соответствии с известным свойством векторов бесконечно малых поворотов мы можем считать $\boldsymbol{\omega}$ суммой трёх отдельных векторов угловых скоростей. К сожалению, векторы $\boldsymbol{\omega}_\varphi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$, $\boldsymbol{\omega}_\psi$ расположены несимметрично: вектор $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ направлен вдоль неподвижной оси z, вектор $\boldsymbol{\omega}_\theta$ — вдоль линии узлов, а $\boldsymbol{\omega}_\psi$ — вдоль подвижной оси z', связанной с телом. Однако составляющие этих векторов относительно любой системы координат можно получить с помощью ортогональных преобразований B, C, D (см. § 4.4).

При рассмотрении уравнений движения особенно удобна система осей, связанных с движущимся телом. Поэтому мы получим составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$ именно в этой системе. Так как вектор $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ параллелен неподвижной оси z, то его составляющие по осям, связанным с телом, можно получить посредством применения полного ортогонального преобразования $\mathsf{A} = \mathsf{BCD}$ [формула (4.46)]:

$$(\boldsymbol{\omega}_\varphi)_{x'} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \quad (\boldsymbol{\omega}_\varphi)_{y'} = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \quad (\boldsymbol{\omega}_\varphi)_{z'} = \dot{\varphi}\cos\theta.$$

Что касается вектора $\boldsymbol{\omega}_\theta$, то он идёт по линии узлов, являющейся осью ξ'. Поэтому составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}_\theta$ по осям, связанным с телом, могут быть найдены посредством применения только одного ортогонального преобразования B [формула (4.45)]:

$$(\boldsymbol{\omega}_\theta)_{x'} = \dot{\theta}\cos\psi, \quad (\boldsymbol{\omega}_\theta)_{y'} = -\dot{\theta}\sin\psi, \quad (\boldsymbol{\omega}_\theta)_{z'} = 0.$$

Наконец, составляющие вектора ω_ψ вообще не требуют преобразования, так как этот вектор направлен вдоль оси z'. Складывая соответствующие составляющие отдельных угловых скоростей, мы получаем составляющие полного вектора $\boldsymbol{\omega}$ по осям, связанным с телом:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{4.103}$$

Тот же приём позволяет выразить через углы Эйлера и составляющие $\boldsymbol{\omega}$ по неподвижным осям.

§ 4.9. Сила Кориолиса. Равенство (4.102) является основным кинематическим уравнением, служащим для получения динамических уравнений движения твёрдого тела. Однако оно применимо не только к движению твёрдого тела, но и к движению материальной точки или системы материальных точек во вращающейся системе координат. Одной из наиболее важных задач этого рода является задача о движении материальной точки относительно системы, связанной с вращающейся Землёй.

В классической механике постулируется, что второй закон движения Ньютона [уравнение (1.1)] справедлив в системе координат с началом в центре Солнца — в так называемой *инерциальной системе координат*. Наземные же измерения обычно производятся в системе координат, связанной с Землёй, которая вращается относительно инерциальной системы с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Уравнение (4.102) позволяет так модифицировать уравнения движения, чтобы они были справедливыми в этой неинерциальной системе отсчёта.

Прежде всего применим уравнение (4.102) к радиусу-вектору данной точки. Проведя этот вектор из начала координат системы, связанной с Землёй, получим:

$$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{4.104}$$

где $\boldsymbol{v}_s$ и $\boldsymbol{v}_r$ — скорости данной точки относительно неподвижной и вращающейся систем координат. Применим теперь уравнение (4.102) к вычислению скорости изменения вектора $\boldsymbol{v}_s$. Проделав это и подставив в полученный результат $\boldsymbol{v}_s$ из (4.104), будем иметь:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt}\right)_s = \boldsymbol{a}_s = \left(\frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{a}_r + 2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}), \tag{4.105}$$

где через $\boldsymbol{a}_s$ и $\boldsymbol{a}_r$ обозначены ускорения точки в двух координатных системах. Поэтому уравнение движения, которое в инерциальной системе координат имеет вид

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_s,$$

будет во вращающейся системе записываться в виде

$$\boldsymbol{F}-2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r)-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\boldsymbol{a}_r. \tag{4.106}$$

Следовательно, наблюдателю, находящемуся во вращающейся системе, будет казаться, что рассматриваемая точка движется под действием некоторой эффективной силы $\boldsymbol{F}_{эф}$, равной

$$\boldsymbol{F}_{эф}=\boldsymbol{F}-2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r)-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}). \tag{4.107}$$

Исследуем члены, входящие в уравнение (4.107). Последний из них представляет собой вектор, перпендикулярный к $\boldsymbol{\omega}$ и направленный от оси вращения. Величина его, как легко видеть, равна $m\omega^2 r\sin\theta$ и, следовательно, он представляет собой обычную центробежную силу. Если рассматриваемая точка находится в покое относительно подвижной системы, то центробежная сила является единственной добавочной силой, входящей в выражение эффективной силы. Однако если эта точка движется, то появляется третий, в нашем уравнении средний, член, известный как *сила Кориолиса*. Порядок величины каждой из этих сил легко оценить, если рассмотреть точку, находящуюся на поверхности Земли. Если смотреть с Северного полюса, то вращение Земли будет казаться происходящим против хода часовой стрелки, и угловая скорость этого вращения будет равна

$$\omega=\frac{2\pi}{24\cdot 3600}=7{,}29\cdot 10^{-5}\ сек^{-1}.$$

При этом значении ω и при r, равном радиусу Земли, центростремительное ускорение будет иметь максимальную величину, равную

$$\omega^2 r=3{,}38\ см/сек^2,$$

т. е. приблизительно $0{,}3\%$ от ускорения силы тяжести. Хотя это ускорение и мало, однако не всегда им можно пренебречь. Центробежная сила всегда направлена от оси Земли, и на экваторе она параллельна радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$. Однако на других широтах эта сила не параллельна $\boldsymbol{r}$, и так как отвесное направление определяется силой тяжести и центробежной силой, то всюду, кроме экватора, отвес устанавливается не точно вдоль радиуса-вектора, хотя отклоняется от него весьма мало. При определении вертикали с помощью отвеса поправка на это явление не вводится, так как истинной вертикалью принято считать не направление радиуса-вектора, а направление отвеса *).

Так как кажущаяся сила тяжести, действующая на маятник, есть сумма гравитационной и центробежной сил, то g будет изменяться с широтой, и на экваторе оно будет иметь наименьшее значение,

*) Вертикаль можно также определить как нормаль к поверхности покоящейся жидкости.

а у полюсов — наибольшее. Приплюснутость земного шара лишь увеличивает этот эффект.

Центробежной силой, вызванной движением Земли вокруг Солнца, мы здесь пренебрегаем, так как она мала по сравнению с центробежной силой, вызванной собственным вращением Земли. Действительно, угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца в 365 раз меньше скорости её суточного вращения, т. е. отношение этих скоростей равно $2{,}7 \cdot 10^{-3}$. С другой стороны, отношение радиуса земной орбиты к радиусу Земли приблизительно равно $(1{,}5 \cdot 10^8$ *км*$):(6 \cdot 10^3$ *км*$) = {}^1/_4 \cdot 10^5$. Следовательно, центробежная сила, вызванная вращением Земли вокруг Солнца, будет меньше центробежной силы, вызванной её суточным вращением, и отношение этих сил будет приблизительно равно

$$ {}^1/_4 \cdot 10^5 \cdot (2{,}7 \cdot 10^{-3})^2 \approx 0{,}2, $$

т. е. будет, как мы видим, не настолько велико, чтобы его стоило учитывать.

Действующая на движущуюся точку сила Кориолиса перпендикулярна как к $\boldsymbol{\omega}$, так и к $\boldsymbol{v}$ *). В Северном полушарии вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен от поверхности Земли, и так как сила Кориолиса равна $2m(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega})$, то, действуя на снаряд, летящий вдоль земной поверхности, она отклоняет его вправо (рис. 49). В Южном полушарии это отклонение направлено в противоположную сторону, а на экваторе, где вектор $\boldsymbol{\omega}$ горизонтален, оно равно нулю. Величина ускорения Кориолиса никогда не бывает больше, чем

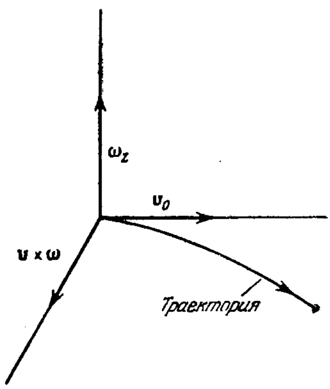

Рис. 49. Отклонение точки, движущейся в Северном полушарии, вследствие силы Кориолиса.

$$ 2\omega v \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4} v, $$

что при скорости 10^5 *см/сек* (3600 *км/час*) даёт величину 15 *см/сек*^{2} или около $0{,}015g$. Как правило, такое ускорение следует рассматривать как весьма малое, однако в некоторых случаях оно становится существенным. Для иллюстрации рассмотрим следующий, несколько искусственный пример. Предположим, что с корабля, находящегося на Северном полюсе, производится выстрел в горизонтальном направлении. Ускорение Кориолиса будет иметь величину $2\omega v$, и линейное отклонение снаряда от его первоначального направления

*) Индекс r у скорости v мы в дальнейшем будем опускать, так как все скорости мы будем рассматривать только относительно вращающейся системы координат.

будет по истечении времени t равно $\omega v t^2$, угловое же отклонение этого снаряда будет равно его линейному отклонению, делённому на пройденный им путь. Следовательно, оно равно

$$\theta = \frac{\omega v t^2}{v t} = \omega t, \tag{4.108}$$

т. е. имеет такую же величину, как угол поворота земного шара за время t. Физический смысл этого становится ясным, если учесть, что снаряд, выстреливаемый с Северного полюса, не имеет начального вращательного движения и, следовательно, в инерциальной системе отсчёта он должен двигаться по прямолинейной траектории. Поэтому должно наблюдаться кажущееся отклонение снаряда вследствие вращения Земли. Количественную оценку рассмотренного эффекта можно получить, если задаться определённым временем полёта, например 100 *сек*, что для крупных снарядов можно считать нормальным временем. Подставив в (4.108) $t = 100$ *сек*, мы для углового отклонения θ получим величину порядка $7 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}4°$, что уже нельзя считать пренебрежимо малым. Ясно, что для управляемых снарядов, таких, например, как Фау-2, этот эффект будет ещё более заметным, так как время их полёта значительно больше.

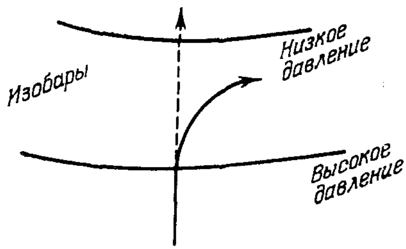

Рис. 50. Отклонение воздушного потока от направления градиента давления вследствие силы Кориолиса (для Северного полушария).

Ещё большее значение получает сила Кориолиса в метеорологической задаче о циркуляции воздуха, так как «продолжительность полёта» [уравнение (4.108)] будет в этом случае намного больше, чем при движении снаряда. Ветер представляет собой движение воздушных масс, и если бы силы Кориолиса отсутствовали, то это движение совершалось бы вдоль градиента давления, т. е. от большего давления к меньшему. Следовательно, оно было бы перпендикулярно к изобарам. Однако в Северном полушарии силы Кориолиса отклоняют воздушные массы от этого направления вправо, как показано на рис. 50. При установившемся состоянии движения скорости частиц воздуха не возрастают и не убывают, и силы, действующие на воздушные массы, обращаются в нуль. В этом случае сила Кориолиса должна быть равна и противоположна силе, вызванной градиентом давления, а это возможно только тогда, когда направление ветра параллельно изобарам. Область низкого давления с приблизительно концентрическими изобарами называют *циклоном*. В результате действия сил Кориолиса воздушные массы циклонов Северного полушария вращаются вокруг центров этих циклонов против хода часовой стрелки; в Южном полушарии это движение совершается по ходу часовой стрелки. В действительности, впрочем, кроме сил давления и сил Кориолиса имеются ещё и силы вязкости, которые отклоняют ветер от направления изобар. В северных широтах это отклонение составляет приблизительно 20—30° (рис. 51).

Другим классическим примером заметного проявления сил Кориолиса является отклонение свободно падающих тел от вертикали. Так как скорость падающего тела является почти вертикальной, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ лежит в северо-южной вертикальной плоскости, то отклоняющая сила $2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})$ будет всегда иметь восточное или западное

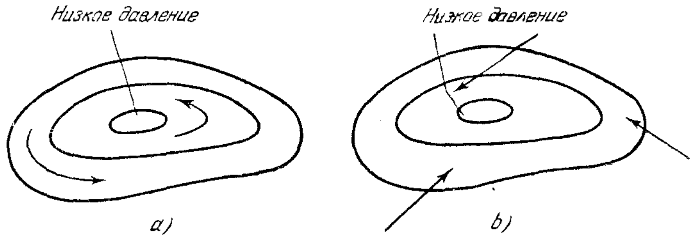

Рис. 51. Схема циклона в Северном полушарии: *a*) при отсутствии сил Кориолиса, *b*) с учётом сил Кориолиса.

направление. В Северном полушарии, например, свободно падающее тело отклоняется к востоку. Вычисление этого отклонения сильно упрощается, если ось z системы, связанной с Землёй, направить по вертикали. Центробежная сила играет в данном случае лишь роль незначительной поправки к вектору $m\boldsymbol{g}$, и если в качестве плоскости yz выбрать северо-южную вертикальную плоскость, то уравнение движения в направлении оси x запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})_x = -2m\omega v_z \sin\theta, \tag{4.109}$$

где θ — широта, отсчитываемая от Северного полюса. Если бы мы учли влияние силы Кориолиса на скорость v_z, то это внесло бы некоторую, очень малую поправку в величину отклонения. Поэтому вертикальную скорость, входящую в уравнение (4.109), можно вычислять без учёта сил Кориолиса. Следовательно, можно принять:

$$v_z = gt,$$

а также

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}.$$

Тогда уравнение (4.109) легко проинтегрировать. Проделав это получим

$$x = -\frac{\omega g}{3}t^3 \sin\theta,$$

или

$$x = -\frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{(2z)^3}{g}}\sin\theta.$$

Порядок величины отклонения можно получить, положив, например, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (экватор) и $z = 50$ *м*. Тогда будем иметь $x \approx 8$ *мм*. Проверить этот результат экспериментально, однако, довольно трудно, так как вследствие малости этого отклонения оно может оказаться поглощённым возмущающим влиянием воздушных потоков, вязкостью или другими случайными факторами.

Более удобен для наблюдения известный эксперимент с маятником Фуко. Если поместить маятник на Северном полюсе и дать ему качаться в некоторой плоскости неподвижного пространства, то проекция его количества движения на перпендикуляр к этой плоскости будет равна нулю, и он будет продолжать качаться в этой неизменной плоскости, хотя Земля будет под ним поворачиваться. Поэтому наблюдателю, находящемуся на Земле, плоскость его колебания будет казаться поворачивающейся со скоростью одного оборота в сутки. На других широтах это явление будет протекать более сложно, однако качественная картина останется такой же. Более подробное исследование этого явления мы предоставляем читателям в качестве упражнения.

Сила Кориолиса сказывается и на некоторых явлениях атомной физики. Так, например, в многоатомной молекуле может одновременно иметь место движение двух типов: *вращение* молекулы как неизменяемой системы и *колебание* её атомов около своих положений равновесия. Таким образом, здесь возникает движение атомов относительно вращающейся системы координат, связанной с молекулой. При этом возникают силы Кориолиса, заставляющие атомы двигаться в направлениях, перпендикулярных к их колебаниям. Возмущения, вызываемые в молекулярных спектрах этими силами, носят характер взаимодействия вращательных и вибрационных уровней молекулы.

Задачи

1. Доказать, что умножение матриц ассоциативно. Показать, что произведение двух ортогональных матриц есть также ортогональная матрица.

2. Доказать следующие свойства транспонированной и эрмитовски сопряжённой матриц:

$$\widetilde{\mathsf{AB}} = \widetilde{\mathsf{B}}\widetilde{\mathsf{A}},$$

$$(\mathsf{AB})^{+} = \mathsf{B}^{+}\mathsf{A}^{+}.$$

3. Показать, что след матрицы инвариантен относительно любого подобного преобразования. Показать также, что антисимметричная матрица остаётся антисимметричной при любом ортогональном подобном преобразовании, а матрица Эрмита — при любом унитарном подобном преобразовании.

4. Выразить элементы матрицы вращения A через углы Эйлера [формула (4.46)], выполнив для этого умножение матриц последовательных поворотов. Убедиться с помощью непосредственной проверки, что элементы матрицы удовлетворяют условиям ортогональности.

5. Показать, что составляющие угловой скорости по осям неподвижной системы координат выражаются через углы Эйлера следующим образом:

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi,$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

6. Шар имеет возможность двигаться по плоскости без скольжения. Выразите условия, накладываемые этой связью, через углы Эйлера. Покажите, что эти условия неинтегрируемы и, следовательно, связь неголономна.

7. Покажите, что комплексные собственные значения ортогональной матрицы, описывающей собственное вращение, равны $e^{\pm i\Phi}$, где Φ — угол поворота.

8. Докажите, что угол поворота Φ выражается через углы Эйлера следующим образом:

$$\cos\frac{\Phi}{2} = \cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

9. Покажите, что три спиновые матрицы Паули антикоммутативны друг относительно друга, т. е. что имеют место равенства

$$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \qquad (i \neq j).$$

Покажите, кроме того, что

$$\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\sigma_k \qquad (i,\ j,\ k \text{ — в циклическом порядке})$$

и что $\sigma_i^2 = 1$ при всех i.

10. Покажите, что $\mathbf{Q}_\theta$ можно символически записать в следующем виде:

$$\mathbf{Q}_\theta = e^{i\sigma_x\frac{\theta}{2}},$$

где правая часть написанного равенства рассматривается как степенной ряд, первый член которого равен единичной матрице $\mathbf{1}$.

11. Снаряд вылетает в горизонтальном направлении и летит вдоль поверхности Земли. Покажите, что в результате действия силы Кориолиса вектор его скорости будет отклоняться от первоначального направления, причём угол этого отклонения будет в первом приближении пропорционален времени. Докажите, что коэффициент этой пропорциональности равен

$$\omega\cos\theta,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, а θ — широта, отсчитываемая от полюса. (В Северном полушарии рассматриваемое отклонение направлено вправо.)

12. В опыте Фуко маятник подвешивается на длинной нити и колебания его происходят около точки, связанной с поверхностью вращающейся Земли. Вектор его начального количества движения лежит в вертикальной плоскости, проходящей через нить маятника. Показать, что его движение можно представить как колебания в плоскости, равномерно вращающейся со скоростью $2\pi\cos\theta$ радиан в сутки, где θ — широта, отсчитываемая от полюса. Каково направление этого вращения? (Если нужно, то можно колебания этого маятника приближённо считать малыми.)

Рекомендуемая литература

H. Margenau и G. M. Murphy, The Mathematics of Physics and Chemistry.

По теории матриц имеется много подробных и полных книг, однако для наших целей достаточна глава 10 указываемой книги, математическая часть которой вполне соответствует вопросам, которые здесь были рассмотрены. В §§ 15.5 и 15.6 этой книги рассматриваются параметры Кэйли — Клейна и спиновые матрицы Паули (хотя с применением сложных обозначений).

H. Jeffreys и B. S. Jeffreys, Methods of Mathematical Physics.

В этой книге охватывается в основном тот же материал, что и в книге Маргенау и Мэрфи, однако здесь делается большее ударение на физических приложениях. В главах 3 и 4 этой книги можно найти многие вопросы, рассмотренные нами в настоящей главе, включая спиновые матрицы Паули и их связь с трёхмерными матрицами вращения. Раздел, посвящённый углам Эйлера, изложен в этой книге непонятно, главным образом вследствие плохих рисунков.

M. Bôcher, Introduction to Higher Algebra.

Эта книга является одним из старых стандартных учебников, и она особенно полезна при изучении теории детерминантов, условий независимости систем уравнений и метода решения линейных независимых уравнений.

R. Courant и D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik *), т. I.

Эта книга в течение долгого времени являлась классическим введением в математические методы теоретической физики. В главе 1, озаглавленной «Алгебра линейных преобразований и квадратичных форм» очень хорошо и ясно изложен вопрос о собственных значениях матрицы линейных преобразований, а также многие другие относящиеся сюда вопросы. В Приложении к главе 1 кратко рассмотрены бесконечно малые преобразования.

H. O. Newboult, Analytical Method in Dynamics.

Применение алгебры матриц для систематического изучения пространственных вращений редко встречается в учебниках по классической механике (хотя оно стало обычным в квантовой механике). Однако в главе II этой небольшой книги кинематика твёрдого тела изучается с помощью матриц. В частности, матрица вращения выражается здесь через углы Эйлера с помощью умножения матриц трёх элементарных поворотов. В главе III кратко изложен вопрос о движении относительно подвижных осей.

L. Brillouin, Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité.

Эта прекрасно написанная книга содержит много различных сведений по целому ряду вопросов, начиная с дифференциальной геометрии и кончая квантовой механикой твёрдых тел. Она является практически единственным пособием по вопросу о псевдовеличинах, т. е. о таких величинах, которые изменяются при отражении. Глава III этой книги полностью посвящена этому вопросу.

E. T. Whittaker Analytical Dynamics.

Глава I этой книги содержит материал, связанный с вопросами, рассмотренными нами в настоящей главе. Раздел об углах Эйлера воспринимается с трудом из-за низкого качества всех рисунков. (Здесь следует сослаться на сделанное нами в § 4.4 примечание относительно сравнения формул этого

---

*) Имеется русский перевод: Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, М. — Л., Гостехиздат, 1945.

автора с нашими.) В § 12 этой книги рассматривается связь между параметрами Кейли — Клейна и так называемым «гомографическим» преобразованием.

W. F. Osgood, Mechanics.

В главе IX этой книги кратко рассматривается движение относительно подвижной системы координат и изучаются эффекты, вызываемые центробежной и кориолисовой силами.

G. Herzberg, Infrared and Raman Spectra.

В этой книге, в особенности в главе IV, §§ 1 и 2, подробно рассмотрен вопрос о влиянии сил Кориолиса на спектры многоатомных молекул; однако следует заметить, что для полного понимания этих вопросов необходимо знать основы теории малых колебаний (см. нашу книгу, главу 10), а также основы квантовой механики.

ГЛАВА 5

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Глава 4 предоставила нам необходимый кинематический аппарат для исследования движения твёрдого тела. Углы Эйлера дают нам систему трёх координат, которые, хотя и не вполне симметричны, однако удобны для использования их в качестве обобщённых координат, описывающих ориентацию твёрдого тела. Кроме того, метод ортогональных преобразований и связанная с ним матричная алгебра дают мощный и изящный аппарат для исследования характеристик движения твёрдого тела. Мы однажды уже применили этот аппарат при выводе уравнения (4.100), связывающего скорости изменения вектора в неподвижной системе координат и в системе, связанной с телом. Теперь мы применим этот аппарат для получения динамических уравнений движения твёрдого тела в их наиболее удобной форме. Получив эти уравнения, мы сможем рассмотреть несколько простых, но важных случаев движения твёрдого тела.

§ 5.1. Кинетический момент и кинетическая энергия тела, имеющего неподвижную точку. Согласно теореме Шаля произвольное перемещение твёрдого тела можно разбить на поступательное и вращательное. Таким образом, эта теорема указывает на возможность разделения задачи о движении твёрдого тела на две отдельные части, одна из которых касается только поступательного движения, а другая — только вращательного. В том случае, когда одна точка тела неподвижна, такое разделение является очевидным, так как в этом случае имеется только одно вращательное движение вокруг неподвижной точки, а поступательное движение отсутствует. Однако и в более общих случаях движения такое разделение часто оказывается возможным. Шесть координат, описывающих движение тела в соответствии с таким разделением, уже были нами рассмотрены. Это — три декартовы координаты некоторой фиксированной точки твёрдого тела (они описывают поступательное движение) и, например, три угла Эйлера, служащие для описания движения тела вокруг этой точки. Если начало подвижной системы выбрать в центре масс тела, то согласно уравнению (1.26) полный кинетический момент его распадается на две части: одну часть, соответствующую движению центра масс, и другую, соответствующую вращению вокруг центра масс. Первая из них будет содержать только декартовы координаты центра масс, а вторая — только угловые координаты. Согласно уравнению (1.29) аналогичное разложение можно выполнить и для кинетической энергии, которую можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + T'(\varphi, \theta, \psi),$$

т. е. как сумму кинетической энергии центра масс в предположении, что в нём сконцентрирована вся масса тела, и кинетической энергии движения вокруг центра масс.

Потенциальную энергию тоже часто удаётся разделить на две подобные части, из которых одна содержит только координаты, соответствующие поступательному движению, а другая — только угловые координаты. Так, например, гравитационная потенциальная энергия зависит только от вертикальной декартовой координаты центра тяжести *). Аналогично, если сила вызывается однородным полем $\boldsymbol{B}$, действующим на диполь с магнитным моментом $\boldsymbol{M}$, то потенциал пропорционален произведению $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B}$, зависящему только от ориентации тела. Вообще почти все практически встречающиеся задачи допускают такое разложение. В этом случае рассматриваемая задача распадается на две, так как лагранжиан $L = T - V$ разбивается при этом на две части, одна из которых содержит только поступательные координаты, а другая — только угловые. Эти две группы координат будут тогда полностью разделены, и задачи о поступательном и о вращательном движении можно решать независимо друг от друга. Поэтому важно получить выражения для кинетического момента и кинетической энергии тела, имеющего неподвижную точку.

Кинетический момент тела относительно неподвижной точки равен

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i), \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{v}_i$ — радиус-вектор и скорость i-й частицы относительно этой точки. Так как в системе координат, связанной с телом, составляющие вектора $\boldsymbol{r}_i$ постоянны, то скорость $\boldsymbol{v}_i$ есть абсолютная скорость, возникающая только вследствие вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Поэтому из уравнения (4.100) будем иметь

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i, \tag{5.2}$$

*) В однородном гравитационном поле центр тяжести, конечно, совпадает с центром масс.

и, следовательно, уравнение (5.1) запишется в виде

$$\boldsymbol{L}=\sum_i m_i\big(\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\big),$$

или, раскрывая двойное векторное произведение:

$$\boldsymbol{L}=\sum_i m_i\big(\boldsymbol{\omega}r_i^2-\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})\big). \tag{5.3}$$

Отсюда для составляющей кинетического момента по оси x получим

$$L_x=\omega_x\sum_i m_i\big(r_i^2-x_i^2\big)-\omega_y\sum_i m_i x_i y_i-\omega_z\sum_i m_i x_i z_i. \tag{5.4}$$

Составляющие вектора $\boldsymbol{L}$ по двум другим осям будут иметь аналогичный вид. Таким образом, каждая из составляющих кинетического момента является линейной функцией составляющих угловой скорости. Следовательно, *вектор кинетического момента получается из угловой скорости посредством линейного преобразования.* Чтобы подчеркнуть аналогию между равенством (5.4) и уравнениями линейного преобразования (4.12), мы запишем L_x в виде

$$L_x=I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z, \tag{5.5}$$

и аналогично для L_y и L_z:

$$\left.\begin{aligned}L_y&=I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y+I_{yz}\omega_z,\\ L_z&=I_{zx}\omega_x+I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z.\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Девять коэффициентов I_{xx}, I_{xy} и т. д. являются элементами матрицы преобразования. Диагональные элементы её известны под названием *осевых моментов инерции*; они имеют вид

$$I_{xx}=\sum_i m_i\big(r_i^2-x_i^2\big). \tag{5.6}$$

Остальные элементы этой матрицы называются *центробежными моментами инерции*; они выражаются равенствами вида

$$I_{xy}=-\sum_i m_i x_i y_i. \tag{5.7}$$

В формулах (5.6) и (5.7) элементы матрицы записаны так, будто твёрдое тело является совокупностью дискретных частиц. Для непрерывных тел это суммирование заменяется объёмным интегрированием, и вместо массы частицы нужно писать плотность. Так, например, диагональный элемент I_{xx} примет тогда вид

$$I_{xx}=\int_V \rho(\boldsymbol{r})\,(r^2-x^2)\,dV. \tag{5.6'}$$

До сих пор мы не указывали, какая координатная система применялась нами при вычислении составляющих вектора $\boldsymbol{L}$. Теперь в качестве такой системы нам будет удобно взять систему, связанную с телом *). Расстояния x_i, y_i, z_i не будут тогда изменяться со временем, и поэтому элементы матрицы будут постоянными величинами, характеризующими данное тело и зависящими от положения осей x, y, z в теле.

Уравнения (5.5), связывающие составляющие $\boldsymbol{L}$ с составляющими $\boldsymbol{\omega}$, можно заменить одним операторным уравнением, имеющим вид

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}, \tag{5.8}$$

где через $\boldsymbol{I}$ обозначен оператор, матрица которого имеет в качестве своих элементов моменты инерции (5.5). Из двух интерпретаций, которые мы давали ранее оператору линейного преобразования (см. § 4.2), здесь под $\boldsymbol{I}$ следует, очевидно, понимать оператор, действующий на вектор $\boldsymbol{\omega}$, а не на координатную систему, так как векторы $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ суть два вектора различной физической природы и разной размерности, а не один и тот же вектор, выраженный в двух различных системах координат. В отличие от оператора вращения оператор $\boldsymbol{I}$ является размерным: его размерность равна [масса $\times$ (длина)^2]. Кроме того, он не связан условиями ортогональности. Таким образом, уравнение (5.8) выражает тот факт, что оператор $\boldsymbol{I}$, действуя на вектор $\boldsymbol{\omega}$, даёт в результате физически новый вектор $\boldsymbol{L}$. Хотя мы в полной мере используем аппарат матричной алгебры, развитый нами при изучении операторов вращения, однако основное внимание мы здесь будем уделять природе и физическому характеру рассматриваемых операторов.

§ 5.2. Тензоры и диады. Так как $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$, то $\boldsymbol{I}$ можно рассматривать как частное от деления $\boldsymbol{L}$ на $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{\omega}}.$$

Однако известно, что отношение двух величин часто не является величиной того класса, к которому принадлежат рассматриваемые величины, а может принадлежать к более сложному классу. Так, например, частное от деления двух целых чисел, вообще говоря, не является целым числом, а является числом рациональным. Точно так же частное от деления двух векторов нельзя, как известно, определить таким образом, чтобы оно принадлежало к классу векторов. Не удивительно поэтому, что $\boldsymbol{I}$ является величиной нового типа, а именно *тензором второго ранга.*

В трёхмерном пространстве тензор T N-го ранга мы будем определять как величину, имеющую 3^N составляющих $T_{ijk\ldots}$ (всего

*) В главе 4 такая система обозначалась штрихами. Так как в дальнейшем составляющие по неподвижным осям будут встречаться у нас редко, то для простоты обозначений мы будем штрихи опускать.

N индексов), которая при ортогональном преобразовании координат преобразуется матрицей A согласно следующей схеме *):

$$T'_{ijk\ldots} = \sum_{l,m,n} a_{il}a_{jm}a_{kn}\ldots T_{lmn\ldots} \tag{5.9}$$

При таком определении тензор нулевого ранга будет иметь только одну составляющую, инвариантную относительно ортогонального преобразования. Следовательно, *скаляр является тензором нулевого ранга.* Тензор первого ранга имеет три составляющих, преобразуемых согласно равенству

$$T'_i = \sum_j a_{ij}T_j.$$

Сравнение этого равенства с уравнениями преобразования векторов [см. (4.14)] показывает, что *тензор первого ранга эквивалентен вектору.*

Наконец, девять составляющих тензора второго ранга преобразуются по схеме

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik}a_{jl}T_{kl}. \tag{5.10}$$

Преобразование матрицы оператора $\boldsymbol{I}$ является подобным преобразованием с помощью матрицы A. Поэтому можно написать

$$\boldsymbol{I}' = \mathsf{A}\boldsymbol{I}\mathsf{A}^{-1},$$

или, так как матрица A ортогональна:

$$\boldsymbol{I}' = \mathsf{A}\boldsymbol{I}\widetilde{\mathsf{A}}.$$

Тогда ij-й элемент преобразованной матрицы определится с помощью равенства

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik}I_{kl}\widetilde{a}_{lj} = \sum_{k,l} a_{ik}a_{jl}I_{kl}, \tag{5.11}$$

совпадающего по форме с (5.10). Отсюда следует, что оператор $\boldsymbol{I}$ есть тензор второго ранга.

Строго говоря, следует различать тензор $\boldsymbol{I}$ и квадратную матрицу, образованную из его составляющих. Определяющим признаком тензора является выполнение определённых правил его преобразования при ортогональном преобразовании координат. С другой стороны, матрица никак не ограничивается видом преобразований, которым она может быть подвергнута, и может рассматриваться совершенно независимо от её свойств при данных преобразованиях.

*) Мы не будем делать различия между ковариантными и контрвариантными тензорами, так как это не имеет значения в случае декартовой системы координат.

Тем не менее, неправильно было бы всегда подчёркивать это различие, так как, оставаясь в пределах ортогональных преобразований, мы будем иметь здесь полную идентичность. Составляющие тензора и элементы матрицы преобразуются в этом случае одинаковым образом, и каждому тензорному равенству при этом будет соответствовать некоторое матричное равенство и наоборот. Эквивалентность между тензорами и матрицами не ограничивается тензорами второго ранга. Так, например, мы знаем, что составляющие вектора, который в сущности является тензором первого ранга, образуют матрицу, состоящую из одного столбца, и поэтому действия над векторами можно трактовать как действия над соответствующими матрицами.

Другое полезное представление оператора $\boldsymbol{I}$ можно получить с помощью *диадного исчисления*. *Диадным произведением* мы будем называть совокупность двух векторов, заданных в определённом порядке. Мы будем обозначать его символом $\boldsymbol{AB}$ и вектор $\boldsymbol{A}$ называть левым множителем, а вектор $\boldsymbol{B}$ — правым. Скалярное произведение $\boldsymbol{AB}$ на вектор $\boldsymbol{C}$ можно получить двумя путями:

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

или

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}).$$

В общем случае эти произведения не равны друг другу, следовательно, скалярное умножение диад некоммутативно. Следует заметить, что в обоих случаях скалярного умножения мы получаем вектор, отличающийся как направлением, так и величиной от вектора $\boldsymbol{C}$. Кроме того, можно ввести произведение

$$\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{CD}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}).$$

Более удобно, однако, записать его в виде

$$\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{CD}\equiv\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{D}.$$

Под *диадой* мы будем понимать сумму *)

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{CD}+\ldots$$

В сущности любое диадное произведение $\boldsymbol{AB}$ можно представить в виде диады, выразив для этого векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ через их соста-

---

*) Если точно придерживаться терминологии Гиббса, которой следует Голдстейн в оригинале этой книги, то диадное произведение $\boldsymbol{AB}$ следует называть диадой, вектор $\boldsymbol{A}$ — предыдущим (антецедентом — antecedent), вектор $\boldsymbol{B}$ — последующим (консеквентом — consequent), произведение $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{C}$ — постфактором (postfactor), произведение $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB}$ — префактором (prefactor), а сумму диадных произведений $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{CD}+\ldots$ — диадиком (dyadic). В тексте, однако, использованы обозначения, принятые в русской литературе (см., например, Д. И. Крутилин, Теория конечных деформаций, 1947, или А. Надаи, Пластичность и разрушение твёрдых тел, 1954). (*Прим. перев.*)

вляющие вдоль ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. В этом случае диадное произведение $\boldsymbol{AB}$ принимает вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB} = A_xB_x\boldsymbol{ii} + A_xB_y\boldsymbol{ij} + A_xB_z\boldsymbol{ik} +\\ + A_yB_x\boldsymbol{ji} + A_yB_y\boldsymbol{jj} + A_yB_z\boldsymbol{jk} +\\ + A_zB_x\boldsymbol{ki} + A_zB_y\boldsymbol{kj} + A_zB_z\boldsymbol{kk}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Правая часть равенства (5.12) называется *девятичленной* формой диадного произведения, так как она содержит девять коэффициентов. Очевидно, таким путём можно свести к девятичленной форме и любую диаду. Так как коэффициенты девятичленного представления диады являются однородными квадратичными функциями составляющих векторов, то, очевидно, они будут преобразовываться так же, как составляющие тензора второго ранга [см. уравнение (5.10)]. И обратно, из каждого тензора второго ранга можно образовать диаду, для чего достаточно использовать составляющие тензора в качестве соответствующих коэффициентов девятичленной формы. Таким образом, имеется полная формальная аналогия между диадой и тензором второго ранга. Кроме того, они эквивалентны и в отношении действия, производимого ими на вектор, ибо мы знаем, что скалярное произведение диады на вектор есть опять некоторый вектор. Поэтому оператор $\boldsymbol{I}$ можно записать таким образом, что будет ясно видна его диадная форма. Для этого мы введём единичную диаду $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1} = \boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk}, \tag{5.13}$$

обозначение которой, конечно, вполне оправдано, так как матрица оператора (5.13) совпадает с единичной матрицей. Кроме того, непосредственное умножение показывает, что

$$\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{A}.$$

Пользуясь этой диадой, можно записать $\boldsymbol{I}$ в виде

$$\boldsymbol{I} = \sum_i m_i\left(r_i^2\mathbf{1} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i\right),$$

что подтверждается равенством

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_i m_i\left[r_i^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\right] = \boldsymbol{L}, \tag{5.14}$$

совпадающим с (5.3).

§ 5.3. Тензор инерции и момент инерции. Тензор $\boldsymbol{I}$ можно рассматривать и как тензор второго ранга и как диаду. Его обычно называют *тензором момента инерции* или просто *тензором инерции*. Преимущество записи тензора $\boldsymbol{I}$ в виде диады состоит в том, что при этом могут применяться обычные векторные операции.

Таким путём мы приходим к естественному способу выражения кинетической энергии вращения через диаду $\boldsymbol{I}$. Кинетическая энергия тела равна

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2,$$

где v_i — абсолютная скорость i-й точки. С помощью формулы (5.2) это равенство можно записать в виде

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i),$$

что согласно формуле для смешанного произведения равно

$$T=\frac{\boldsymbol{\omega}}{2}\cdot\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i).$$

Вектор, стоящий здесь под знаком суммы, представляет кинетический момент тела относительно начала координат, и поэтому

$$T=\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}}{2}=\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega}}{2}. \tag{5.15}$$

Пусть, далее, $\boldsymbol{n}$ будет единичным вектором в направлении $\boldsymbol{\omega}$, так что $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$. Тогда кинетическую энергию T можно будет представить в виде

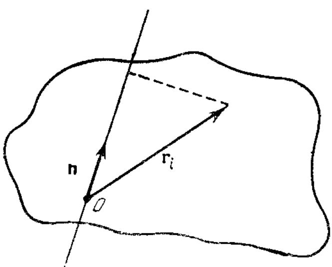

Рис. 52. К вычислению момента инерции.

$$T=\frac{\omega^2}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}I\omega^2, \tag{5.16}$$

где I — скаляр, определяемый равенством

$$I=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}=\sum_i m_i\left[r_i^2-(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{n})^2\right]. \tag{5.17}$$

Он называется *моментом инерции тела относительно оси вращения*.

При элементарном изложении момент инерции тела относительно оси определяют как сумму произведений масс отдельных его частиц на квадраты их расстояний до этой оси. Покажем, что это определение согласуется с выражением (5.17). Расстояние до оси равно, как известно, $|\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{n}|$ (рис. 52). Поэтому согласно обычному определению

$$I=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{n}).$$

Рассматривая теперь первую из этих скобок как один вектор и пользуясь формулой для смешанного произведения, мы можем написать:

$$I=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{n}).$$

Наконец, раскрыв двойное векторное произведение, окончательно получим

$$I=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\cdot[\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{n})]=\sum_i m_i\left[r_i^2-(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{n})^2\right],$$

что совпадает с (5.17).

Величина момента инерции зависит от направления оси вращения, а так как в процессе движения вектор $\boldsymbol{\omega}$ обычно изменяет своё направление относительно тела, то момент инерции следует рассматривать как функцию времени. Исключение составляет момент инерции тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; он остаётся постоянным. В этом случае кинетическая энергия в форме (5.16) почти достаточна для составления лагранжиана и уравнений движения. Дальнейший шаг заключается лишь в том, чтобы выразить ω в виде производной по времени от некоторого угла, что, конечно, можно сделать без труда.

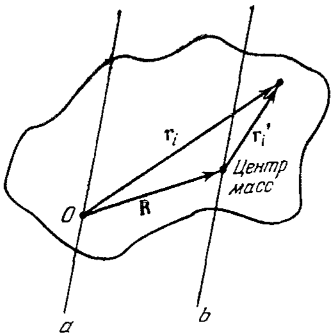

Рис. 53. К вычислению моментов инерции относительно параллельных осей.

Момент инерции (как и тензор инерции) зависит также от выбора начала подвижной системы координат. Однако существует простая зависимость между моментами инерции относительно данной оси и параллельной ей оси, проходящей через центр масс. Пусть $\boldsymbol{R}$ обозначает вектор, идущий из начала координат O в центр масс, а $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}_i'$ — радиусы-векторы, идущие в i-ю точку из точки O и из центра масс. Эти три вектора связаны соотношением

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_i'.$$

Момент инерции относительно оси a будет тогда равен

$$I_a=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{n})^2=\sum_i m_i\left[(\boldsymbol{r}_i'+\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{n}\right]^2$$

или

$$I_a=\sum_i m_i(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{n})^2+\sum_i m_i\left(\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{n}\right)^2+2\sum m_i(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{n})\cdot\left(\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{n}\right).$$

Но последний член этого выражения можно представить в виде

$$-2(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{n})\cdot\left(\boldsymbol{n}\times\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'\right),$$

где $\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'$ согласно определению центра масс равно нулю. Следовательно, связь между моментом инерции относительно оси a и моментом инерции относительно оси b, параллельной a, выражается следующим образом:

$$I_a = I_b + M(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n})^2. \tag{5.18}$$

Величина вектора $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n}$, очевидно, равна расстоянию от центра масс до оси a.

Таким образом, момент инерции относительно оси a равен моменту инерции относительно параллельной ей оси b, проходящей через центр масс, плюс момент инерции данного тела относительно оси a, полученный в предположении, что вся масса тела сосредоточена в центре масс. Эта теорема весьма схожа по форме с теоремами, которые были получены нами в § 1.1 для количества движения, кинетического момента и кинетической энергии.

§ 5.4. Собственные значения тензора инерции и главные оси преобразования. Предыдущие рассуждения имели целью подчеркнуть ту важную роль, которую играет тензор инерции при изучении движения твёрдых тел. С этой точки зрения исследование свойств этого тензора и связанной с ним матрицы представляет значительный интерес. Из формулы (5.7) видно, что составляющие этого тензора симметричны, т. е.

$$I_{xy} = I_{yx}.$$

Так как, кроме того, они вещественны, то матрица этого тензора совпадает со своей *эрмитовски сопряжённой* [см. уравнение (4.38)], т. е. является *матрицей Эрмита*. Таким образом, хотя этот тензор имеет девять составляющих, однако среди них будет только шесть независимых: три вдоль диагонали и три по одну сторону от неё.

Моменты инерции зависят как от положения начала подвижной системы, так и от её ориентации относительно тела. Было бы, конечно, весьма удобно, если бы при заданном положении начала координат можно было найти такую ориентацию подвижных осей, при которой тензор инерции является диагональным и, следовательно, может быть записан в виде диады

$$\boldsymbol{I}' = I_1\boldsymbol{ii} + I_2\boldsymbol{jj} + I_3\boldsymbol{kk}. \tag{5.19}$$

В такой системе координат каждая из составляющих вектора $\boldsymbol{L}$ будет содержать только соответствующую составляющую вектора $\boldsymbol{\omega}$; таким образом, в этом случае будем иметь:

$$L_x = I_1\omega_x, \quad L_y = I_2\omega_y, \quad L_z = I_3\omega_z. \tag{5.20}$$

Аналогичное упрощение получается здесь и для кинетической энергии, которая принимает вид

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{1}{2}I_1\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_z^2. \tag{5.21}$$

Можно показать, что такие оси всегда существуют; доказательство этого основывается на том, что тензор инерции является эрмитовым.

Как отмечалось в § 4.6, уравнение, определяющее собственные значения матрицы, можно решить путём приведения этой матрицы к диагональному виду; элементы полученной матрицы и будут тогда искомыми собственными значениями. Следовательно, задача отыскания системы, в которой $\boldsymbol{I}$ имеет диагональный вид, является задачей о собственных значениях матрицы тензора $\boldsymbol{I}$, причём числа I_1, I_2, I_3 суть собственные значения этой матрицы. Кроме того, ясно, что в координатной системе, где тензор $\boldsymbol{I}$ является диагональным, направление координатных осей совпадает с направлением собственных векторов. Пусть, например, вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет направлен вдоль одной из осей координат, скажем вдоль оси x. Тогда кинетический момент $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ будет направлен вдоль этой же оси. Следовательно, действие оператора $\boldsymbol{I}$ на вектор, параллельный одной из координатных осей, состоит в образовании другого вектора, идущего в том же направлении. Но согласно определению такой вектор должен быть одним из собственных векторов преобразования $\boldsymbol{I}$.

В § 4.6 мы говорили о диагонализации матрицы и отыскании её собственных значений. Однако сама по себе эта процедура не является доказательством существования *вещественной декартовой системы*, в которой матрица тензора $\boldsymbol{I}$ ортогональна. Вспомним, например, что, за исключением тривиальных случаев, любая ортогональная матрица имеет только одно вещественное собственное значение и, значит, для собственных векторов её имеется только одно вещественное направление (направление оси вращения). В противоположность этому мы сейчас докажем, что *все* собственные значения матрицы тензора $\boldsymbol{I}$ являются вещественными, а три вещественных направления её собственных векторов взаимно ортогональны *).

Пусть X_{kj} будет k-я составляющая j-го собственного вектора матрицы тензора $\boldsymbol{I}$ (согласно обозначениям § 4.6). Тогда уравнения, определяющие собственные векторы, запишутся в виде

$$\sum_k I_{ik} X_{kj} = I_j X_{ij}. \tag{5.22}$$

Умножая написанное равенство на X_{il}^* и суммируя по всем i, получаем

$$\sum_{i,k} X_{il}^* I_{ik} X_{kj} = I_j \sum_i X_{il}^* X_{ij}. \tag{5.23}$$

*) Это значит, что матрица X, которая диагонализирует матрицу тензора $\boldsymbol{I}$ посредством подобного преобразования, является *вещественной ортогональной* матрицей.

Сумму, стоящую в правой части этого равенства, можно записать в виде произведения $\boldsymbol{R}_l^* \cdot \boldsymbol{R}_j$, т. е. в виде скалярного произведения собственного вектора $\boldsymbol{R}_j$ и вектора, комплексно сопряжённого с собственным вектором $\boldsymbol{R}_l$. Составляя теперь для I_l уравнение, подобное (5.22), и переходя затем к комплексно сопряжённому уравнению, будем иметь

$$\sum_i I_{ki}^* X_{il}^* = I_l^* X_{kl}^*.$$

Умножая это равенство на X_{kj} и суммируя по k, получаем

$$\sum_{i,\ k} X_{il}^* I_{ki}^* X_{kj} = I_l^* \sum_k X_{kl}^* X_{kj}, \tag{5.24}$$

причём сумму, стоящую в правой части этого равенства, опять можно заменить на $\boldsymbol{R}_l^* \cdot \boldsymbol{R}_j$. Но так как матрица тензора $\boldsymbol{I}$ является эрмитовой, то

$$I_{ik} = I_{ki}^*,$$

и, следовательно, левые части равенств (5.23) и (5.24) одинаковы. Вычитая одно из другого, получаем

$$(I_j - I_l^*) \boldsymbol{R}_l^* \cdot \boldsymbol{R}_j = 0. \tag{5.25}$$

Пусть теперь l равно j. Тогда

$$\boldsymbol{R}_l^* \cdot \boldsymbol{R}_j = |\boldsymbol{R}_j|^2$$

будет некоторым положительным числом, и поэтому левая часть равенства (5.25) будет обращаться в нуль только при $I_j = I_l^*$, что доказывает первую часть рассматриваемой теоремы. Заметим, что в этом доказательстве использовалось лишь то обстоятельство, что матрица тензора $\boldsymbol{I}$ является эрмитовской. Таким образом, *собственные значения любой эрмитовой матрицы являются вещественными*. Так как матрица тензора $\boldsymbol{I}$ является, кроме того, вещественной, то вещественными должны быть и направляющие косинусы её собственных векторов $\boldsymbol{R}_j$.

Пусть теперь l отлично от j и все собственные значения различны. Тогда левая часть равенства (5.25) будет обращаться в нуль только тогда, когда $\boldsymbol{R}_l \cdot \boldsymbol{R}_j = 0$, т. е. когда собственные векторы ортогональны, что доказывает вторую половину теоремы *). Если

*) Здесь можно заметить близкую аналогию, связанную с уравнением Штурма — Лиувилля в теории дифференциальных уравнений в частных производных, так как известно, что собственные значения дифференциального оператора Эрмита являются вещественными, а соответствующие собственные функции — ортогональными. Эта аналогия не является случайной, ибо всегда можно установить соответствие между данным уравнением в частных производных и некоторой матрицей. Именно такое соответствие имеет место в квантовой теории между матричной механикой и волновой механикой.

собственные значения матрицы тензора I не все различны, то изложенное доказательство ортогональности не проходит, однако оно может быть для этого случая немного изменено, что можно сделать без большого труда. Если имеются два одинаковых собственных значения, то соответствующие собственные векторы не обязательно будут ортогональны. Однако любая линейная комбинация этих собственных векторов должна опять быть собственным вектором матрицы тензора I с тем же собственным значением. Следовательно, все векторы, лежащие в плоскости, определяемой двумя этими собственными векторами, также являются собственными векторами. Тогда собственный вектор, соответствующий третьему собственному значению, будет перпендикулярен к этой плоскости. Поэтому в рассматриваемой плоскости можно выбрать два произвольных взаимно перпендикулярных вектора, которые вместе с третьим, им перпендикулярным, определят три искомые оси. Аналогично, если все собственные значения будут одинаковы, то все направления пространства будут направлениями собственных векторов. Но это значит, что матрица тензора I является диагональной и её не требуется диагонализировать.

Таким образом, методы матричной алгебры позволили нам показать, что для любой точки твёрдого тела существует декартова система координат, в которой тензор инерции является диагональным. Оси этой системы называются *главными осями инерции*, а соответствующие диагональные элементы I_1, I_2, I_3 — *главными моментами инерции*. Ортогональное преобразование, с помощью которого оси данной подвижной системы координат преобразуются в главные оси, известно как *преобразование к главным осям*. Практически главные моменты инерции находятся, конечно, из уравнения, определяющего собственные значения матрицы тензора I, т. е. из векового уравнения. Напомним, как получается это уравнение. Заметим, что при $i = 1$, 2, 3 уравнения (5.22) образуют систему трёх однородных линейных уравнений относительно составляющих собственного вектора. Поэтому они будут иметь нетривиальное решение только в том случае, когда детерминант из их коэффициентов будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz}-I \end{vmatrix} = 0. \tag{5.26}$$

Уравнение (5.26) является вековым уравнением, кубическим относительно I, и три его корня представляют искомые моменты инерции. Для каждого из этих корней можно найти решения уравнений (5.22) и получить таким путём направление соответствующей главной оси.

Во многих простых случаях о главных осях твёрдого тела можно судить непосредственно по его виду. Часто, например, встречаются случаи, когда рассматриваемое тело представляет собой тело вращения, а начало подвижной системы координат лежит на его оси симметрии. Тогда все направления, перпендикулярные к оси симметрии, будут, очевидно, равнозначными, что указывает на наличие двойного корня векового уравнения. Главными осями будут в этом случае ось симметрии и две любые взаимно перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии.

К понятию о главных осях можно придти и из некоторых геометрических соображений. Исторически они были первыми, которые привели к этому понятию. Момент инерции относительно данной оси мы определили как

$$I = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{n}.$$

Обозначив направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{n}$ через α, β, γ, будем иметь

$$\boldsymbol{n} = \alpha \boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{j} + \gamma \boldsymbol{k},$$

и тогда вследствие симметрии выражения для I его можно будет записать в виде

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha. \qquad (5.27)$$

Введём теперь вектор $\boldsymbol{\rho}$, определяемый равенством

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{n}}{\sqrt{I}}.$$

Таким образом, мы связываем величину этого вектора с моментом инерции относительно оси $\boldsymbol{n}$. Вводя составляющие этого вектора в равенство (5.27), мы можем записать последнее в виде

$$1 = I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3 + 2I_{zx}\rho_3\rho_1. \qquad (5.28)$$

Рассматривая правую часть этого уравнения как функцию трёх переменных, мы видим, что оно является уравнением некоторой поверхности в пространстве вектора $\boldsymbol{\rho}$. Эта поверхность представляет собой поверхность эллипсоида, который называется *эллипсоидом инерции*. Известно, что всегда можно найти такое преобразование декартовых координат, в результате которого уравнение эллипсоида принимает канонический вид

$$1 = I_1\rho_1'^2 + I_2\rho_2'^2 + I_3\rho_3'^2, \qquad (5.29)$$

и главные оси его оказываются направленными вдоль новых осей координат. Но уравнение (5.29) имеет как раз такой вид, какой приобретает уравнение (5.28) в системе координат, где тензор инерции $\boldsymbol{I}$ является диагональным. Следовательно, преобразование координат, приводящее уравнение эллипсоида к каноническому виду, совпадает с рассмотренным выше преобразованием к главным осям.

Главные моменты инерции определяют длину осей эллипсоида инерции. Если два корня векового уравнения будут равны, то эллипсоид инерции будет иметь две равные оси и, следовательно, будет эллипсоидом вращения. Если же все главные моменты инерции будут равны, то эллипсоид инерции превратится в сферу.

Величиной, тесно связанной с моментом инерции, является *радиус инерции* R_0, определяемый равенством

$$I = MR_0^2. \tag{5.30}$$

С помощью радиуса инерции вектор $\boldsymbol{\rho}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{R_0 \sqrt{M}}.$$

Следовательно, радиус-вектор каждой точки эллипсоида инерции обратно пропорционален радиусу инерции относительно оси, на которой лежит этот вектор.

§ 5.5. Общий метод решения задачи о движении твёрдого тела. Уравнения Эйлера. Весь аппарат, необходимый для решения задачи о движении твёрдого тела, нами практически уже получен. В некоторых случаях, когда на это тело наложены неголономные связи, нам потребуется применить специальные приёмы, чтобы учесть их. Так обстоит дело, например, в том случае, когда на тело наложена «связь качения», которая может быть учтена с помощью введения неопределённых множителей Лагранжа, как это делается в § 2.4. Если, однако, исключить эти специальные случаи, то, как правило, нам придётся иметь дело только с голономными и консервативными системами, а движение таких систем вполне определяется их лагранжианом. Если рассматриваемое тело является свободным, то нам потребуется полная система из шести обобщённых координат: трёх декартовых координат для описания поступательного движения и трёх углов Эйлера для описания его вращения. Кинетическую энергию этого тела можно представить как энергию его поступательного движения вместе с центром масс и энергию вращательного движения, т. е. в виде

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Чтобы получить удобное выражение для второго члена этой суммы, его обычно выражают в главных осях; при этом вращательная энергия приобретает простой вид, получающийся из (5.21) после подстановки туда составляющих вектора $\boldsymbol{\omega}$, выраженных через углы Эйлера. Разумеется, если одна точка твёрдого тела закреплена, то его кинетическая энергия будет состоять только из энергии вращения, и тогда задача значительно упростится.

В ряде случаев изучаемое движение является плоским, например движение пластины в своей плоскости. Тогда направление оси вращения будет всё время перпендикулярным к этой плоскости, т. е. будет фиксированным в пространстве. В этом случае понадобятся не три угла, характеризующих вращение, а только один такой угол, и можно будет обойтись без громоздких формул, содержащих углы Эйлера.

Хотя формально уравнения Лагранжа и достаточны для решения рассматриваемой задачи, однако в случае тела с одной неподвижной точкой часто удобнее пользоваться другими уравнениями, известными под названием *уравнений Эйлера*.

Эти уравнения можно получить следующим образом. В случае, когда действующие силы являются консервативными, рассматриваемое твёрдое тело имеет лагранжиан, равный

$$L = T - V = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2) - V(\theta,\ \varphi,\ \psi), \tag{5.31}$$

где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции относительно неподвижной точки. Далее, нам нужно подставить сюда составляющие ω_x, ω_y, ω_z, выраженные через углы Эйлера, что можно сделать с помощью формул (4.103), связывающих главные оси тела с некоторой неподвижной системой осей. Полученный таким путём лагранжиан будет функцией трёх углов поворота: θ, φ и ψ. Заметим теперь, что если некоторая обобщённая координата описывает вращение, то соответствующая обобщённая сила будет составляющей вращающего момента вдоль оси вращения (см. § 2.6). Поэтому обобщённые силы, соответствующие координатам θ, φ, ψ, будут составляющими действующего вращающего момента, но только не вдоль главных осей тела, а вдоль линии узлов, неподвижной оси z и подвижной оси z', связанной с телом. Следовательно, из трёх этих обобщённых сил только сила $-\frac{\partial V}{\partial \psi}$, соответствующая углу ψ, представляет полный момент действующих сил относительно одной из главных осей — оси z. Поэтому уравнение Лагранжа, соответствующее координате ψ, можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = N_z. \tag{5.32}$$

Далее, из уравнений (4.103) видно, что производную $\dot{\psi}$ содержит только составляющая ω_z, а саму координату ψ — только составляющие ω_x и ω_y. При этом имеют место равенства:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} = 1, \qquad \frac{\partial \omega_x}{\partial \psi} = \omega_y, \qquad \frac{\partial \omega_y}{\partial \psi} = -\omega_x.$$

С помощью этих формул и формулы кинетической энергии в форме (5.21) мы получим следующие выражения для частных производных, входящих в (5.32):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_3\omega_z,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = I_1\omega_x\omega_y - I_2\omega_y\omega_x.$$

Поэтому уравнение (5.32) принимает вид

$$I_3\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y(I_1 - I_2) = N_z. \tag{5.33}$$

Далее заметим, что, выбирая одну из главных осей в качестве оси z, мы совершали этот выбор совершенно произвольно. Поэтому в уравнении (5.33) можно переставить индексы и написать аналогичное уравнение для составляющей полного момента относительно любой из главных осей. Таким образом, мы сразу получаем полную систему уравнений движения, которая имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z(I_2 - I_3) &= N_x, \\ I_2\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x(I_3 - I_1) &= N_y, \\ I_3\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y(I_1 - I_2) &= N_z. \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Это — так называемые уравнения Эйлера для движения твёрдого тела с одной неподвижной точкой. Следует подчеркнуть, что третье из этих уравнений является уравнением Лагранжа для координаты ψ, однако два других *не являются* уравнениями Лагранжа для координат θ и φ. Это видно хотя бы из того, что производная $-\frac{\partial V}{\partial \theta}$ не равна N_x или N_y, а является составляющей момента $\boldsymbol{N}$ по линии узлов.

Возможен другой вывод уравнений Эйлера, основанный на теореме о кинетическом моменте, согласно которой

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

[см. уравнение (1.24)]. Производная по времени здесь берётся, конечно, в неподвижной системе координат, так как это уравнение справедливо только в инерциальной системе. С другой стороны, в уравнения (5.34) входят производные по времени от составляющих вектора $\boldsymbol{\omega}$ по подвижным осям. Однако согласно равенству (4.100) имеем:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{\text{пространство}} = \left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{\text{тело}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L},$$

и, следовательно, проекция уравнения

$$\frac{dL}{dt}=N$$

на главную ось x имеет вид

$$\frac{dL_x}{dt}+\omega_y L_z-\omega_z L_y=N_x. \tag{5.35}$$

Учитывая теперь, что составляющие кинетического момента L_x, L_y, L_z равны произведениям $I_x\omega_x$, $I_y\omega_y$, $I_z\omega_z$, получим

$$I_1\dot{\omega}_x-\omega_y\omega_z(I_2-I_3)=N_x,$$

что совпадает с первым из уравнений (5.34). Остальные уравнения получаются отсюда посредством циклической перестановки индексов.

§ 5.6. Свободное движение твёрдого тела. Одной из задач, к которой можно применить уравнения Эйлера, является задача о движении твёрдого тела, не подверженного действию никаких сил. Центр масс такого тела будет находиться в покое или будет двигаться равномерно. Поэтому, не нарушая общности решения, мы можем рассмотреть движение этого тела в системе, связанной с его центром масс. Тогда центр масс этого тела будет неподвижен, и поэтому кинетический момент будет возникать только вследствие вращения вокруг центра масс. Поэтому уравнения Эйлера будут уравнениями движения этой системы, а так как мы рассматриваем случай, когда моменты сил отсутствуют, то эти уравнения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_x&=\omega_y\omega_z(I_2-I_3),\\ I_2\dot{\omega}_y&=\omega_z\omega_x(I_3-I_1),\\ I_3\dot{\omega}_z&=\omega_x\omega_y(I_1-I_2). \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

Конечно, эти уравнения будут описывать также движение твёрдого тела с неподвижной точкой в случае отсутствия внешних моментов.

Известны два непосредственных интеграла этих уравнений, выражающих постоянство кинетической энергии и кинетического момента этого тела. С помощью этих интегралов уравнения (5.36) можно проинтегрировать в эллиптических функциях, однако этот путь не очень интересен, так как можно дать изящное геометрическое описание рассматриваемого движения, не требующее полного решения задачи. Оно известно под названием геометрической интерпретации Пуансо.

Рассмотрим координатную систему, образованную главными осями тела, и в этой системе координат рассмотрим функцию

$$F(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\rho},$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор, определённый нами в § 5.4. Поверхности $F = \text{const}$ будут тогда эллипсоидами и, в частности, поверхность $F = 1$ будет эллипсоидом инерции. Так как направление оси вращения изменяется со временем, то вектор $\boldsymbol{\rho}$ также будет изменять своё направление, причём конец его будет в каждый момент времени определять некоторую точку на поверхности эллипсоида инерции. Градиент функции F определяет направление нормали к эллипсоиду инерции в этой точке. Исходя теперь из определения функции F и учитывая, что $\boldsymbol{I}$ имеет в главных осях диагональную форму, получаем следующее выражение для частной производной F по ρ_1:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_1} = (\nabla F)_1 = 2I_1\rho_1.$$

Но так как вектор $\boldsymbol{\rho}$ можно определить также как

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega \sqrt{I}},$$

то будем иметь

$$(\nabla F)_1 = \frac{2}{\omega \sqrt{I}} I_1 \omega_x,$$

или

$$(\nabla F)_1 = \frac{2}{\omega \sqrt{I}} L_x$$

и аналогично

$$(\nabla F)_2 = \frac{2}{\omega \sqrt{I}} L_y,$$

$$(\nabla F)_3 = \frac{2}{\omega \sqrt{I}} L_z.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет изменяться таким образом, что соответствующая нормаль к эллипсоиду инерции будет параллельна вектору кинетического момента. Но в том частном случае, который мы здесь рассматриваем, направление вектора $\boldsymbol{L}$ остаётся неизменным, и поэтому эллипсоид инерции (жёстко связанный с телом) должен двигаться в пространстве таким образом, чтобы сохранялась эта связь между $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{L}$ (рис. 54).

Покажем теперь, что расстояние от центра эллипсоида инерции по плоскости, касающейся его в точке $\boldsymbol{\rho}$, остаётся постоянным. Действительно, так как это расстояние равно проекции $\boldsymbol{\rho}$ на $\boldsymbol{L}$, то оно определяется из равенства

$$\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{L}}{L} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L}}{\omega L \sqrt{I}} = \frac{2T}{L\sqrt{I\omega^2}},$$

или

$$\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{L}}{L} = \frac{\sqrt{2T}}{L}. \tag{5.37}$$

Но кинетическая энергия T и кинетический момент L являются некоторыми константами рассматриваемого движения, и, следовательно, касательная плоскость будет отстоять от центра эллипсоида инерции на постоянном расстоянии. Однако так как нормаль к этой плоскости направлена вдоль $\boldsymbol{L}$ и, следовательно, имеет неизменное направление, то эта плоскость является *неподвижной*. Поэтому рассматриваемое движение можно реализовать посредством качения эллипсоида инерции по некоторой неподвижной плоскости; центр эллипсоида инерции находится при этом в фиксированной точке

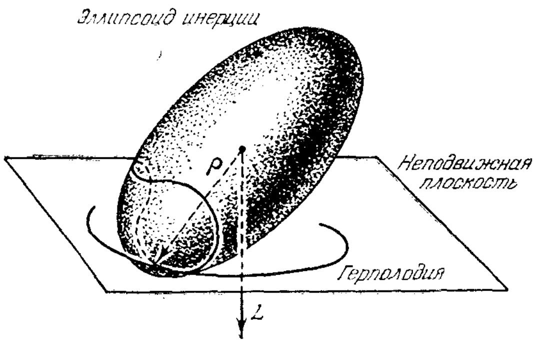

Рис. 54. Движение эллипсоида инерции по неподвижной плоскости.

пространства. Это качение происходит без скольжения, так как точка касания эллипсоида инерции с неподвижной плоскостью определяется вектором $\boldsymbol{\rho}$, который направлен по мгновенной оси вращения, т. е. по той прямой, все точки которой находятся в данный момент в покое. Кривая, описываемая на эллипсоиде инерции точкой касания, называется *полодией*, а аналогичная кривая на неподвижной плоскости называется *герполодией* *).

Геометрическая интерпретация Пуансо даёт полное представление о движении тела, не подверженного действию никаких сил. Ориентация неподвижной плоскости Пуансо и её расстояние от центра эллипсоида инерции определяется значениями T и $\boldsymbol{L}$, которые находятся из начальных условий. Задача об определении полодии и герполодии становится тогда чисто геометрической задачей. Направление угловой скорости определяется направлением вектора $\boldsymbol{\rho}$, а мгновенная ориентация тела определяется ориентацией эллипсоида инерции, который жёстко связан с движущимся телом.

*) Выражаясь коротко, можно сказать, что полодия катится без скольжения по неподвижной герполодии.

Подробное описание рассмотренного движения с позиций картины Пуансо можно найти в ряде различных книг *).

В случае симметричного тела эллипсоид инерции становится эллипсоидом вращения, а полодия превращается в окружность с центром на оси симметрии. Вектор угловой скорости описывает в этом случае поверхность конуса, следовательно, вектор $\boldsymbol{\omega}$ *прецессирует* вокруг оси симметрии тела.

В случае симметричного твёрдого тела нетрудно получить аналитическое решение, которое подтверждает прецессионный характер рассматриваемого движения, исследованного нами с помощью интерпретации Пуансо. Примем ось симметрии за ось z. Тогда будем иметь $I_1 = I_2$, и уравнения Эйлера (5.36) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_x &= (I_1 - I_3)\,\omega_z\omega_y, \\ I_1\dot{\omega}_y &= -(I_1 - I_3)\,\omega_z\omega_x, \\ I_3\dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.38}$$

Последнее из этих уравнений показывает, что ω_z является величиной постоянной и поэтому может рассматриваться как одно из известных начальных данных. Из двух остальных уравнений можно исключить ω_x или ω_y, что можно сделать посредством дифференцирования одного из этих уравнений. Взяв, например, производную по времени от левой и правой части первого из уравнений (5.38), получим

$$I_1\ddot{\omega}_x = (I_1 - I_3)\,\omega_z\dot{\omega}_y.$$

Подставив теперь сюда вместо $\dot{\omega}_y$ его выражение из второго уравнения (5.38), будем иметь

$$\ddot{\omega}_x = -\left[\frac{(I_1 - I_3)\,\omega_z}{I_1}\right]^2 \omega_x. \tag{5.39}$$

Из уравнения (5.39) видно, что ω_x изменяется по гармоническому закону с угловой частотой

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\,\omega_z. \tag{5.40}$$

Поэтому функция $\omega_x(t)$ может быть записана в виде

$$\omega_x = A\sin\Omega t, \tag{5.41}$$

где A — некоторая постоянная. Функция $\omega_y(t)$ может быть найдена посредством подстановки (5.41) в первое уравнение (5.38) и решения его относительно ω_y. Проделав это, найдём

$$\omega_y = A\cos\Omega t. \tag{5.42}$$

---

*) См., в частности, Webster, Dynamics of Particles and Rigid Bodies, а также статью Winkelmann und Grammel в т. V Handbuch der Physik и монографию F. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels,

Формулы (5.41) и (5.42) показывают, что вектор $\omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j}$ имеет постоянную величину и равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω (рис. 55). Следовательно, полная угловая скорость

$$\omega = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}$$

тоже имеет постоянную величину и *прецессирует* вокруг оси z с той же угловой скоростью; это согласуется с картиной движения по Пуансо *). Следует помнить, что эта прецессия является прецессией относительно осей, связанных с телом, которые в свою очередь вращаются в неподвижном пространстве с большей угловой скоростью ω. Из равенства (5.40) видно, что чем ближе I_1 к I_3, тем меньше будет скорость прецессии Ω по сравнению со скоростью вращения ω. Постоянные A (амплитуда прецессии) и ω_z можно выразить через более естественные константы движения, а именно через кинетическую энергию T и кинетический момент L. Для этого нужно воспользоваться выражениями T и L^2 через A и ω_z, которые имеют вид:

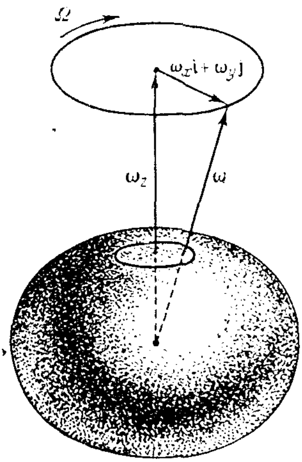

Рис. 55. Прецессия вектора угловой скорости вокруг оси симметричного твёрдого тела в случае отсутствия сил.

$$T = \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2,$$
$$L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_z^2,$$

и разрешить написанные равенства относительно A и ω_z.

Ось вращения Земли даёт пример рассмотренной прецессии, так как внешние моменты, действующие на Землю, настолько малы, что её вращение можно считать происходящим без действия внешних сил. Так как Земля симметрична относительно своей оси и слегка сплюснута у полюсов, то для неё I_1 меньше чем I_3, причём численное отношение этих моментов таково, что

$$\frac{I_1 - I_3}{I_1} = -0{,}0033.$$

*) Этот результат можно получить также следующим способом. Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ означает вектор, идущий вдоль оси z и имеющий величину, определяемую равенством (5.40). Тогда уравнения (5.38) будут по существу эквивалентны одному векторному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Отсюда сразу видно, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ прецессирует вокруг оси z с угловой скоростью Ω.

Следовательно, величина угловой скорости прецессии Земли равна

$$\Omega = \frac{\omega_z}{300}.$$

Но так как ω_z практически имеет ту же величину, что и ω, то полученный результат показывает, что период прецессии Земли составляет 300 дней или 10 месяцев. Поэтому наблюдатель, находящийся на Земле, должен обнаружить, что ось её вращения описывает окружность вокруг Северного полюса, совершая один оборот за 10 месяцев. Нечто похожее на это явление удаётся наблюдать в действительности, но амплитуда прецессии оказывается при этом настолько малой, что ось вращения никогда не удаляется от Северного полюса более чем на 5 метров. Следует, однако, заметить, что орбита этого движения оказывается довольно нестабильной, а наблюдаемый период составляет приблизительно 427 дней, а не 300, как это получается по расчёту. Флюктуации этого движения приписывают небольшим изменениям в распределении масс Земли, например вызываемым движением её атмосферы, а расхождение в периоде, видимо, возникает в результате того, что Земля не представляет собой твёрдого тела, а является телом упругим *).

§ 5.7. Тяжёлый симметричный волчок с одной неподвижной точкой. В качестве следующего, более сложного примера мы рассмотрим движение тяжёлого симметричного тела, имеющего неподвижную точку на оси симметрии. К задаче о *тяжёлом симметричном волчке* приводит исследование ряда физических систем, начиная от простого детского волчка и кончая сложными гироскопическими навигационными приборами. Поэтому как в отношении практических применений, так и для иллюстрации развитых нами методов движение тяжёлого симметричного волчка заслуживает подробного рассмотрения.

Ось симметрии является, конечно, одной из главных осей волчка; мы её примем за ось z системы, связанной с движущимся телом. Так как одна точка волчка является неподвижной, то его положение вполне определяется тремя углами Эйлера: угол θ определяет отклонение оси z от вертикали, угол φ определяет азимут волчка, а угол ψ характеризует поворот волчка вокруг его собственной оси (рис. 56). Расстояние от центра тяжести волчка, расположенного

---

*) Прецессию земной оси при свободном движении не следует путать с медленной прецессией вокруг нормали к эклиптике. Последняя представляет собой *астрономическое* явление, известное под названием *предварения равноденствий*, и вызывается гравитационными моментами Солнца и Луны, которыми мы пренебрегали. То, что такое пренебрежение допустимо, видно, например, из того, что период предварения равноденствий велик (26 000 лет) по сравнению с периодом свободной прецессии, равным, грубо говоря, одному году. Астрономическая прецессия рассматривается дальше в § 5.7 и в задачах.

на его оси симметрии, до неподвижной точки мы обозначим через l.

Для решения задачи о движении волчка мы используем не уравнения Эйлера, а уравнения Лагранжа. Так как рассматриваемое тело является симметричным, то его кинетическая энергия может быть записана в виде

$$T=\frac{1}{2}I_1\left(\omega_x^2+\omega_y^2\right)+\frac{1}{2}I_3\omega_z^2$$

или с учётом (4.103) в виде

$$T=\frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\right)^2. \qquad (5.43)$$

Полученная формула выражает T через углы Эйлера. Потенциальная энергия волчка равна, очевидно,

$$V=Mgl\cos\theta, \qquad (5.44)$$

и поэтому лагранжиан его имеет вид

$$L=\frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\right)^2-Mgl\cos\theta. \qquad (5.45)$$

Заметим, что углы φ и ψ не входят явным образом в лагранжиан. Следовательно, они являются циклическими координатами, указывающими на неизменность соответствующих обобщённых импульсов. Но мы знаем, что обобщённый импульс, соответствующий какому-либо углу поворота, представляет собой составляющую полного кинетического момента относительно соответствующей оси вращения, какой для угла φ является вертикальная ось, а для угла ψ — ось z, связанная с телом. Поэтому составляющие кинетического момента относительно этих осей должны оставаться постоянными. В сущности то, что эти составляющие кинетического момента должны быть постоянными, можно показать, исходя из элементарных принципов. Действительно, момент силы тяжести симметричного волчка направлен вдоль линии узлов. Следовательно, кинетические моменты волчка относительно вертикали и относительно его собственной оси должны быть равны нулю, так как согласно определению этих осей они перпендикулярны к линии узлов.

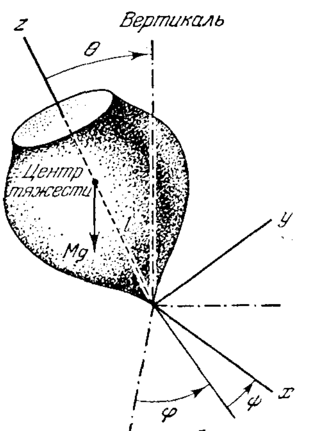

Рис. 56. Углы Эйлера для симметричного волчка.

Поэтому мы можем сразу написать два первых интеграла движения:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = I_3\omega_z = I_1 a \tag{5.46}$$

и

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\,\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta = I_1 b. \tag{5.47}$$

(Константы, которые нужно было написать в правых частях этих равенств, мы записали в виде $I_1 a$ и $I_1 b$, где a и b — некоторые постоянные.) Так как рассматриваемая система консервативна, то можно написать ещё один первый интеграл, имеющий вид

$$E = T + V = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}\omega_z^2 + Mgl\cos\theta, \tag{5.48}$$

где E — постоянная, равная полной энергии этой системы.

Для того чтобы решить задачу, нам теперь потребуются только три квадратуры, которые легко получить из этих трёх первых интегралов без непосредственного применения уравнений Лагранжа. Выражая согласно уравнению (5.46) $\dot\psi$ через $\dot\varphi$, получаем

$$I_3\dot\psi = I_1 a - I_3\dot\varphi\cos\theta. \tag{5.49}$$

Подставляя теперь это выражение в (5.47) и исключая таким способом $\dot\psi$, находим:

$$I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_1 a\cos\theta = I_1 b,$$

или

$$\dot\varphi = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}. \tag{5.50}$$

Таким образом, если мы будем знать θ как функцию времени, то, интегрируя уравнение (5.50), сумеем найти зависимость φ от t. Подставив теперь (5.50) в (5.49), мы получим следующую зависимость $\dot\psi$ от θ:

$$\dot\psi = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos\theta\,\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}. \tag{5.51}$$

Это уравнение позволяет найти $\psi(t)$, если известно $\theta(t)$. Наконец, с помощью уравнений (5.50) и (5.51) можно исключить $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ из уравнения энергии и получить таким путём уравнение, содержащее только θ. Заметим, что согласно равенству (5.46) $\omega_z = \mathrm{const} = \frac{I_1}{I_3}a$. Поэтому $E - \frac{1}{2}I_3\omega_z^2$ является постоянной движения; мы обозначим её через E'. Тогда уравнение энергии можно будет записать в виде

$$E' = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + Mgl\cos\theta. \tag{5.52}$$

После подстановки сюда равенства (5.50) и некоторых преобразований это уравнение примет вид

$$\sin^2\theta\dot{\theta}^2 = \sin^2\theta(\alpha - \beta\cos\theta) - (b - a\cos\theta)^2, \tag{5.53}$$

где α и β — постоянные, равные:

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \quad \beta = \frac{2Mgl}{I_1}. \tag{5.54}$$

Вводя теперь в (5.53) переменную $u = \cos\theta$, получаем

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \tag{5.55}$$

и приходим к квадратуре

$$t = \int\limits_{u(\ )}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}. \tag{5.56}$$

С помощью этого равенства и уравнений (5.50) и (5.51) функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ также можно получить посредством квадратур. Однако полином, стоящий под корнем интеграла (5.56), является кубическим, и, следовательно, этот интеграл может быть выражен только через эллиптические функции. Подробное исследование получающихся таким путём решений можно найти в ряде книг *), однако, как и в случае свободного движения твёрдого тела, здесь физическая сторона явления часто в значительной степени затемняется вследствие большого количества математики. К счастью, общий характериз учаемого движения можно исследовать, не прибегая к интегрированию.

Обозначим правую часть уравнения (5.55) через $f(u)$. Корни этого кубического полинома определяют углы, при которых $\dot{\theta}$ изменяет свой знак. При больших значениях $|u|$ доминирующим членом полинома $f(u)$ является член βu^3. Но так как β всегда больше нуля [см. уравнение (5.54)], то при больших положительных u функция $f(u)$ будет положительной, а при больших отрицательных u — отрицательной. В точках $u = \pm 1$ функция $f(u)$ равна $-(b \mp a)^2$ и, следовательно, всегда отрицательна, за исключением особого случая, когда значение $u = \pm 1$ является корнем полинома $f(u)$ (т. е. когда волчок находится в вертикальном положении). Следовательно, по крайней мере один корень этого полинома должен лежать в области $u > 1$, т. е. в области, которой не соответствуют вещественные углы. Но так как величина $\dot{u}^2$ положительна и, кроме того, $-1 \leqslant u \leqslant 1$, т. е. $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, то мы должны заключить, что для любого «вещественного» волчка функция $f(u)$ имеет два

*) См., например, книги Ф. Клейна и А. Зоммерфельда, Уиттекера или весьма подробную книгу: Macmillan, Dynamics of Rigid Bodies. Имеется русский перевод: Мак-Миллан В. Д., *Динамика твёрдого тела*, ИЛ, 1951.

корня u_1 и u_2, лежащих между -1 и $+1$ (рис. 57). Следовательно, волчок будет двигаться так, что значение $\cos\theta$ будет всё время заключено между u_1 и u_2. Положение этих корней на оси u и характер функций $\dot{\varphi}(\cos\theta)$ и $\dot{\psi}(\cos\theta)$ для значений θ, заключённых между u_1 и u_2, дают нам много качественных сведений о движении волчка *).

Обычно движение волчка изображают посредством кривой, которую описывает так называемый *апекс*, под которым понимают конец единичного вектора, отложенного от начала координат в положительном направлении подвижной оси z. Траектория апекса является сферической кривой, и полярные координаты её точек совпадают с углами Эйлера θ и φ. Из предыдущего параграфа видно, что траектория апекса лежит между окружностями $\theta_1 = \arccos u_1$ и $\theta_2 = \arccos u_2$, причём $\dot{\theta}$ обращается на этих окружностях в нуль. Форма кривой, описываемой апексом, в большой степени определяется корнем двучлена $b - au$; обозначив этот корень через u', будем иметь

$$u' = \frac{b}{a}. \tag{5.57}$$

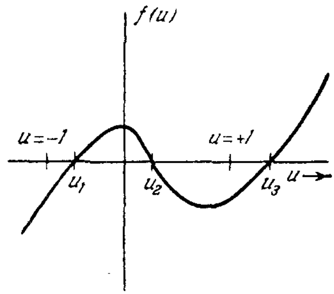

Рис. 57. Расположение корней функции $f(u)$ для тяжёлого симметричного волчка.

Пусть, например, начальные условия таковы, что u' больше чем u_2. Тогда согласно (5.50) производная $\dot{\varphi}$ будет при всех θ, лежащих между крайними значениями θ_1 и θ_2, иметь один и тот же знак. Следовательно, траектория апекса будет в этом случае касаться граничных окружностей таким образом, что $\dot{\varphi}$ будет одинаково направлено как при θ_1, так и при θ_2 (рис. 58, *а*).

Угол φ изменяется в этом случае монотонно, и поэтому можно сказать, что ось волчка *прецессирует* около вертикальной оси. Однако это движение не является регулярной прецессией, встречавшейся нам в случае свободного движения твёрдого тела, так как в данном случае ось волчка не только вращается вокруг вертикали, но и колеблется вверх и вниз между граничными углами θ_1 и θ_2. Таким образом, рассматриваемый волчок *нутирует* во время прецессии.

---

*) Существует очевидное сходство между этим методом рассмотрения движения волчка и методом «эквивалентного потенциала», применявшимся в главе 3 для центральных сил. Действительно, модифицированное уравнение энергии (5.52) можно рассматривать как уравнение одномерного движения точки, масса которой равна I_1, а потенциальная энергия равна

$$Mgl\cos\theta + \frac{I_3}{2}\frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}.$$

Если же u' будет лежать между u_1 и u_2, то направления прецессии на граничных окружностях будут различными, и траектория апекса будет иметь петлеобразный вид, как показано на рис. 58, *b*. Среднее значение $\dot{\varphi}$, однако, не будет при этом равно нулю и, следовательно, будет иметься прецессия в том или ином направлении.

Может также случиться, что u' будет совпадать с одним из корней функции $f(u)$. Тогда на соответствующих граничных окружностях обратятся в нуль и $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$, что приведёт к появлению точек заострения в этих местах траектории апекса, как показано на рис. 58, *c*. Следует заметить, что этот случай не является исключительным, как это может показаться на первый взгляд, так как он соответствует тем естественным начальным условиям, которые обычно

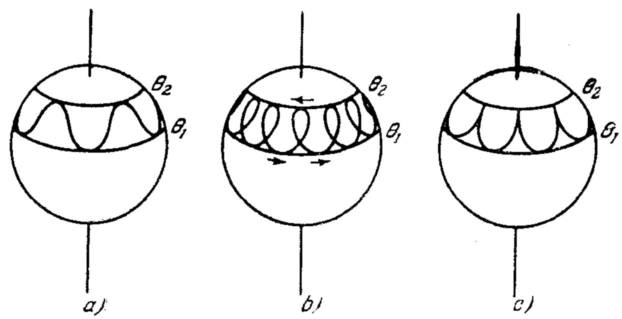

Рис. 58. Возможные формы кривых, описываемых апексом на сфере единичного радиуса.

рассматриваются в элементарной теории волчка. Они состоят в следующем: симметричный волчок получает начальную угловую скорость вокруг собственной неподвижной оси, которая затем освобождается, и волчок начинает своё движение. Эти начальные условия имеют вид: $[\theta]_{t=0}=\theta_0$, $[\dot{\theta}]_{t=0}=[\dot{\varphi}]_{t=0}=0$, и отсюда следует, что $\cos\theta_0$ должен быть одним из корней функции $f(u)$. Покажем теперь, что он соответствует верхней граничной окружности. Для этого заметим, что в рассматриваемом случае величина E' будет в начальный момент равна $Mgl\cos\theta_0$, причём члены формулы (5.52), содержащие $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$, всегда положительны. Следовательно, когда $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ начинают изменяться от нуля, то энергия E' может остаться неизменной только в случае уменьшения потенциальной энергии, т. е. в случае увеличения угла θ. Поэтому θ_0 будет равно θ_2, т. е. будет равно минимальному значению угла θ. Отсюда видно, что *рассматриваемый волчок в начале своего движения всегда опускается* и продолжает опускаться до тех пор, пока не будет достигнут другой граничный угол — угол θ_1; при этом волчок всё время прецессирует. Когда ось волчка достигает угла θ_1, она опять начинает подниматься, и θ вновь становится равным θ_2 и т. д. (см. рис. 58, *c*). При указанных начальных условиях ($\dot{\theta}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$) и при достаточно быстром вращении волчка его движение можно исследовать элементарными методами и в количественном отношении. Это удаётся сделать только в том случае, когда начальная кинетическая энергия волчка велика по сравнению с возможным изменением его потенциальной энергии, т. е. когда выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_z^2 \gg 2Mgl. \tag{5.58}$$

Эффекты, вызванные моментом силы тяжести, т. е. прецессия и нутация, будут тогда играть роль малых возмущений, накладываемых на вращение волчка вокруг своей оси. В этом случае (в случае «быстрого волчка») можно вычислить величину и период нутации, а также среднюю угловую скорость прецессии.

Так как согласно заданным начальным условиям θ_2 равно θ_0, то можно написать $u_2 = u_0$. Поэтому амплитуда нутации будет зависеть от значения другого вещественного корня функции $f(u)$. Заметим, что так как при $u = u_0$ скорость $\dot{\varphi}$ обращается в нуль, то

$$b = au_0.$$

Кроме того, так как $f(u_0) = 0$, то из (5.55) заключаем, что

$$\alpha = \beta u_0.$$

(Это равенство выражает тот факт, что $E' = Mgl \cos \theta_0$.) С помощью этих соотношений функция $f(u)$ может быть записана в виде

$$f(u) = (u_0 - u) \{\beta (1 - u^2) - a^2 (u_0 - u)\}. \tag{5.59}$$

Отсюда следует, что корнями функции $f(u)$, отличными от u_0, являются корни квадратного полинома, стоящего в фигурных скобках. Таким образом, искомый корень u_1 удовлетворяет уравнению

$$\left(1 - u_1^2\right) - \frac{a^2}{\beta} (u_0 - u_1) = 0. \tag{5.60}$$

Разность $u_0 - u$ мы будем обозначать через x, а разность $u_0 - u_1$ через x_1. Поэтому уравнение (5.60) можно записать в виде

$$x_1^2 + px_1 - q = 0, \tag{5.61}$$

где

$$p = \frac{a^2}{\beta} - 2 \cos \theta_0, \quad q = \sin^2 \theta_0.$$

Но членом $2 \cos \theta_0$ в выражении для p можно пренебречь, так как отношение a^2/β можно записать в виде

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right) \frac{I_3 \omega_z^2}{2Mgl},$$

и поскольку рассматриваемый волчок является «быстрым» [см. неравенство (5.58)], то оно во много раз больше 2 (за исключением случая, когда отношение I_3/I_1 очень мало, что соответствует волчку необычной, сигарообразной формы). По той же причине p^2 во много раз больше $4q$, и поэтому первый корень уравнения (5.61) можно считать равным

$$x_1 = \frac{q}{p},$$

а второй —

$$x_1 = -p - \frac{q}{p}.$$

Второй из этих корней соответствует значению u, большему единицы, и, следовательно, интересующий нас корень равен

$$x_1 = \frac{\beta \sin^2 \theta_0}{a^2} = \frac{I_1}{I_3} \frac{2Mgl}{I_3 \omega_z^2} \sin^2 \theta_0. \tag{5.62}$$

Таким образом, амплитуда нутации, которую можно считать пропорциональной $x_1 = u_0 - u_1$, будет тем меньше, чем меньше $1/\omega_z^2$, т. е. чем быстрее вращается волчок.

В случае «быстрого волчка» можно легко найти и *угловую частоту* нутации. Так как амплитуда её в этом случае мала, то член $(1-u^2)$ в уравнении (5.59) можно заменить его начальным значением, равным $\sin^2\theta_0$. Тогда уравнение (5.59) примет вид

$$f(u) = \dot{x}^2 = x(\beta \sin^2 \theta_0 - a^2 x). \tag{5.63}$$

Уравнение (5.63) представляет собой дифференциальное уравнение, определяющее изменение x со временем. Оно может быть без труда проинтегрировано. При начальном условии $x_{t=0} = 0$ решение его имеет вид

$$x = \frac{x_1}{2}(1 - \cos at), \tag{5.64}$$

где x_1 — величина, определяемая равенством (5.62). Следовательно, угловая частота нутации равна

$$a = \frac{I_3}{I_1}\omega_z, \tag{5.65}$$

и, как показывает эта формула, она будет *тем больше, чем больше начальная скорость собственного вращения волчка.*

Найдём теперь угловую скорость прецессии. Согласно (5.50) она равна

$$\dot{\varphi} = \frac{a(u_0 - u)}{\sin^2\theta} \approx \frac{ax}{\sin^2\theta_0},$$

или, учитывая (5.64) и (5.62),

$$\dot{\varphi} = \frac{\beta}{2a}(1 - \cos at). \tag{5.66}$$

Следовательно, скорость прецессии не постоянна, а изменяется по гармоническому закону с той же угловой частотой, что и мутация. *Средняя* угловая частота прецессии получается равной

$$\bar{\dot{\varphi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3\omega_z}. \tag{5.67}$$

Отсюда видно, что скорость прецессии будет тем меньше, чем больше начальная скорость вращения волчка.

Таким образом, мы получили полную картину движения быстрого волчка, ось которого вначале неподвижна. Мы видим, что сразу после того, как ось его освобождается, он начинает опускаться под действием силы тяжести. Но, начиная опускаться, волчок приобретает прецессионную скорость, прямо пропорциональную величине его опускания, что заставляет его ось двигаться не вниз, а вбок. При этом, кроме прецессии, появляется также нутация оси волчка, которая носит периодический характер. С увеличением начальной скорости волчка амплитуда нутации быстро уменьшается, а частота нутации увеличивается. Прецессионное движение волчка вокруг вертикали становится при этом более медленным. Практически нутация достаточно быстрого волчка сильно демпфируется трением в опоре. Поэтому она становится незаметной, и тогда *кажется*, что волчок равномерно прецессирует вокруг вертикальной оси. Так как такая прецессия является регулярной только приближённо, то она получила название *псевдорегулярной прецессии* (согласно Клейну и Зоммерфельду). В элементарной теории волчка нутацией в большинстве случаев пренебрегают, что приводит к парадоксальному выводу, будто, получив возможность двигаться, ось волчка *сразу* начинает равномерно прецессировать, т. е. начинает двигаться в направлении, *перпендикулярном* к силе тяжести, которая является причиной прецессии. Однако из предыдущих рассуждений ясно, что прецессия возникает не сразу, т. е. ось волчка начинает двигаться из состояния покоя без бесконечно больших ускорений. При этом начальная тенденция волчка состоит в том, чтобы двигаться *в направлении* силы тяжести.

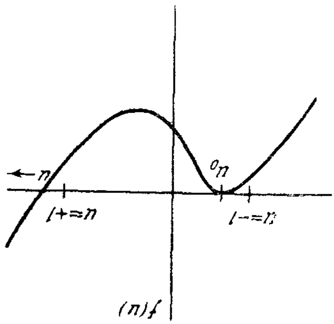

Рис. 59. График функции $f(u)$ в случае регулярной прецессии.

Интересно определить, какие начальные условия обеспечивают регулярную прецессию. Так как в этом случае угол θ должен быть постоянным, равным θ_0, то это означает, что $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, или, другими словами, что функция $f(u)$ должна иметь двукратный корень u_0 (рис. 59). Мы можем высказать это и иначе, потребовав, чтобы при $\theta = \theta_0$ обращалось в нуль не только $\dot{\theta}$, но и $\ddot{\theta}$ *). Записывая уравнение энергии [уравнение (5.53)] в виде

$$\dot{\theta}^2 = (\alpha - \beta \cos \theta) - \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \tag{5.68}$$

и дифференцируя его по времени, будем иметь

$$2\ddot{\theta}\dot{\theta} = \beta \sin \theta \dot{\theta} + 2 \cos \theta \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} \dot{\theta} - \frac{2a (b - a \cos \theta)}{\sin \theta} \dot{\theta}.$$

Так как в обе части этого равенства входит множитель $\dot{\theta}$, то условие $\ddot{\theta} = 0$ (при $\theta = \theta_0$) можно с помощью уравнения (5.50) записать в виде

$$\frac{\beta}{2} = a\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \cos \theta. \tag{5.69}$$

Подставляя сюда β из (5.54), а a из (5.46), получаем:

$$Mgl = \dot{\varphi} [I_3\dot{\psi} - (I_1 - I_3) \dot{\varphi} \cos \theta]. \tag{5.70}$$

В общем случае начальные условия требуют задания величин $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, θ, φ и ψ при $t = 0$. Но так как две из них, φ и ψ, являются циклическими, то начальные значения их являются для нас несущественными, и дело сводится к заданию четырёх остальных величин. Но так как мы требуем, чтобы движение волчка представляло регулярную прецессию, то выбор этих четырёх начальных значений не может быть произвольным, ибо они должны удовлетворять равенству (5.70). Выбрав, например, начальные значения $\dot{\theta}$ и, скажем, θ и $\dot{\psi}$ почти произвольно, мы найдём соответствующее значение $\dot{\varphi}$. Мы говорим «почти произвольно», потому что уравнение (5.70) является квадратным, и для того, чтобы $\dot{\varphi}$ было вещественным, дискриминант уравнения должен быть положительным. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$I_3\dot{\psi}^2 - 4Mgl (I_1 - I_3) \cos \theta \geqslant 0,$$

ограничивающее область допустимых начальных значений θ и $\dot{\psi}$. Вследствие того, что уравнение (5.70) является квадратным, оно опреде-

---

*) Требование, чтобы $\ddot{\theta}$ обращалось в нуль, вполне эквивалентно требованию, чтобы $u_0 = \cos \theta_0$ было двукратным корнем функции $f(u)$, ибо последнее можно записать в виде равенства

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = 0 = 2\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = 2\ddot{\theta}$$

$\left(\text{так как } \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dfrac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)$. Полученное здесь выражение для $\ddot{\theta}$ совпадает, конечно, с тем, которое мы получили бы, составляя уравнение Лагранжа для координаты θ.

ляет в общем случае два значения $\dot{\varphi}$, соответствующих «быстрой» и «медленной» прецессии. Следует также заметить, что ни при каком конечном $\dot{\psi}$ уравнение (5.70) не удовлетворяется значением $\dot{\varphi}=0$. Следовательно, получить равномерную прецессию можно, лишь сообщив волчку начальный толчок. Без этой правильно выбранной начальной скорости прецессии можно в лучшем случае получить лишь псевдорегулярную прецессию.

Если прецессия медленная, так что величиной $\dot{\varphi}\cos\theta$ можно пренебречь по сравнению с a, то $\dot{\varphi}$ будет приближённо равно

$$\dot{\varphi}=\frac{\beta}{2a},$$

что совпадает со средней скоростью псевдорегулярной прецессии быстрого волчка. Этот результат следовало, конечно, ожидать, так как если скорость прецессии мала, то мала и разница между движением гироскопа с небольшим начальным толчком и движением без толчка.

Следующий случай, который мы сейчас рассмотрим, — это случай, когда значение $u=1$ является одним из корней функции $f(u)$. Предположим, что волчок начинает вращаться в вертикальном положении. Ясно, что тогда b будет равно a, так как постоянные $I_1 b$ и $I_1 a$ являются составляющими кинетического момента относительно вертикальной оси и оси волчка, а эти оси в рассматриваемом положении совпадают. Так как начальная угловая скорость волчка направлена в этом случае строго по его оси, то, положив в равенстве (5.52) $\dot{\theta}=0$ (т. е. рассматривая это равенство при $t=0$), будем иметь

$$E'=E-\frac{1}{2}I_3\omega_z^2=Mgl,$$

откуда следует, что $\alpha=\beta$ [см. уравнение (5.54)]. Поэтому уравнение энергии этого волчка может быть записано в виде

$$\dot{u}^2=(1-u^2)\beta(1-u)-a^2(1-u)^2$$

или

$$\dot{u}^2=(1-u)^2\{\beta(1+u)-a^2\}.$$

Из этого уравнения видно, что число $u=1$ является его двукратным корнем; третий корень этого уравнения равен

$$u_3=\frac{a^2}{\beta}-1.$$

Если $a^2/\beta>2$ (что соответствует «быстрому волчку»), то $u_3>1$, и единственным возможным движением будет такое, при котором $u=1$, т. е. такое, когда волчок продолжает вращаться вокруг вертикали. График функции $f(u)$ имеет в этом случае вид, показанный на рис. 60, a. Если же $a^2/\beta < 2$, то u_3 будет меньше единицы, и функция $f(u)$ будет иметь вид, показанный на рис. 60, b. В этом случае волчок нутирует между $\theta = 0$ и $\theta = \theta_3$. Таким образом, существует критическая угловая скорость ω', выше которой возможно только вертикальное движение волчка. Величина её определяется равенством

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right)\frac{I_3\omega'^2}{2Mgl} = 2,$$

откуда

$$\omega'^2 = 4\frac{MglI_1}{I_3^2}. \tag{5.71}$$

Практически, если вертикально стоящий волчок начинает вращаться со скоростью, большей, чем ω', то некоторое время он действительно будет продолжать вращение вокруг вертикали (отсюда название «спящий волчок»). Однако трение будет постепенно уменьшать

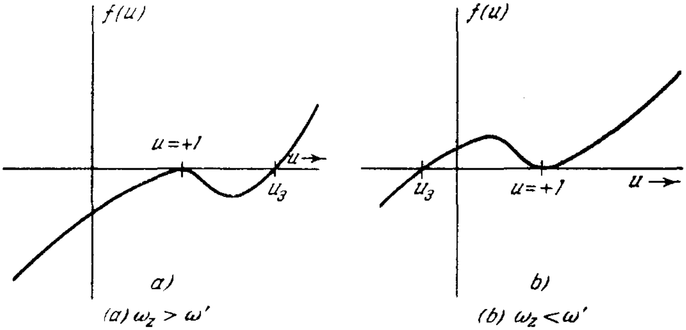

Рис. 60. График функции $f(u)$ в случае волчка, ось которого в начальный момент времени вертикальна.

скорость его вращения, и когда она станет ниже критической, волчок начнёт раскачиваться, притом тем сильнее, чем больше будет падать скорость его вращения.

Мы уже говорили, что Землю можно рассматривать как волчок, ось которого прецессирует относительно нормали к эклиптике (это движение известно в астрономии под названием предварения равноденствий). Если бы Земной шар был однородным телом, имеющим форму правильной сферы, то другие тела солнечной системы не могли бы действовать на него с некоторым гравитационным моментом. Однако Земля немного сплюснута у полюсов и слегка «выпучена» у экватора. Поэтому на неё действует гравитационный момент (главным образом со стороны Солнца и Луны), что заставляет ось Земли прецессировать. Момент этот весьма мал, и поэтому прецессия Земной оси оказывается исключительно медленной: период её составляет 26 000 лет, в то время как период её собственного вращения равен всего одним суткам. Полный гравитационный момент, действующий на Земной шар, не является постоянным, так как моменты Солнца и Луны имеют несколько различные направления по отношению к эклиптике и изменяются, когда Земля, Солнце и Луна движутся друг относительно друга. В результате этого в прецессии Земли появляются некоторые неправильности, называемые *астрономической нутацией*. Её, однако, не следует путать с истинной нутацией, рассмотренной выше, которая имеет место и тогда, когда момент вызывается постоянной силой. Клейн и Зоммерфельд отмечали, что истинная нутация выглядит так же, как прецессия оси вращения Земли относительно её оси симметрии при отсутствии сил (мы рассматривали её в предыдущем параграфе). Земля, по-видимому, начала вращаться с начальным значением $\dot{\varphi}$, значительно бóльшим того, которое требуется для равномерной прецессии, и поэтому её нутация выглядит приблизительно так, как показано на рис. 58, *b*. Можно показать, что при этих условиях период нутации близок к периоду прецессии при отсутствии внешних сил [определяемому формулой (5.40)].

Хотя объём данной книги не позволяет подробно остановиться на многочисленных технических приложениях гироскопов, мы всё же кратко коснёмся этого вопроса. Под «гироскопом» обычно понимают симметричный волчок, установленный в кардановом подвесе таким образом, что центр тяжести его остаётся неподвижным, а ось может занимать любое положение в пространстве. В этом случае на волчок не действуют гравитационные моменты относительно его центра тяжести, и поэтому вектор его кинетического момента остаётся постоянным. Если гироскопу будет сообщена угловая скорость вокруг собственной оси и эта ось будет вначале неподвижной (и поэтому будет совпадать по направлению с вектором кинетического момента), то в дальнейшем она будет всё время сохранять своё направление в пространстве. Поэтому такой гироскоп можно использовать в качестве указателя неизменного направления, так как движение экипажа, несущего гироскоп, не будет влиять на направление его оси.

Значительно более сложно действие так называемого гирокомпаса. В этом приборе ось волчка ограничена в своём движении и может поворачиваться только в горизонтальной плоскости. Но так как вследствие вращения Земли эта плоскость всё время меняет свою ориентацию в неподвижном пространстве, то под действием реакций связей гироскоп вынужден прецессировать с периодом одни сутки вокруг земной оси. Ось такого гироскопа стремится сохранить своё направление в пространстве, но так как установка гирокомпаса препятствует ему прецессировать относительно горизонтальной плоскости, то появляются реакции подшипников, действующие на этот гироскоп. Можно показать, что эти силы стремятся установить ось гироскопа параллельно оси прецессии, в данном случае параллельно оси вращения Земли. Поэтому такое устройство может служить для указания направления меридиана, т. е. может быть использовано в качестве «гирокомпаса».

§ 5.8. Прецессия заряженных тел в магнитном поле. Из предыдущего параграфа видно, что движение симметричного волчка в гравитационном поле является в общем случае весьма сложным. В противоположность этому движение вращающегося заряженного тела, находящегося в однородном *магнитном поле*, имеет сравнительно простой характер. Тем не менее, мы рассмотрим это движение, так как оно играет важную роль в атомной физике. Вместо уравнений Лагранжа в данном случае проще воспользоваться одной из общих теорем динамики, а именно теоремой о кинетическом моменте, согласно которой

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}, \tag{1.24}$$

где $\boldsymbol{L}$ — кинетический момент системы, а $\boldsymbol{N}$ — момент внешних сил. Мы будем предполагать, что рассматриваемое тело состоит из частиц, имеющих одно и то же отношение заряда e к массе m.

В результате вращения этого тела заряженные частицы его будут как-то двигаться в пространстве, и, следовательно, будут возникать токи, взаимодействующие с магнитным полем. Если это поле является однородным, то сумма сил, с которыми оно будет действовать на рассматриваемое тело, будет равна нулю *), а момент этих сил будет равен

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}, \tag{5.72}$$

где $\boldsymbol{M}$ — магнитный момент токов, а $\boldsymbol{B}$ — напряжённость магнитного поля. Поэтому уравнение движения будет иметь в данном случае вид

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}. \tag{5.73}$$

Если пользоваться единицами Гаусса, то при произвольном распределении токов магнитный момент будет равен

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2c}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}\,dV, \tag{5.74}$$

где $\boldsymbol{j}$ — плотность тока, а dV — элемент объёма **). В качестве примера применения этой формулы вычислим магнитный момент тока,

*) В этом случае центр масс можно считать неподвижным и кинетический момент можно брать относительно любой точки тела (см. § 1.2).

**) См., например, R. Becker, Theorie der Elektrizität, т. II, 6-е изд., стр. 98, или Stratton, Electromagnetic Theory, N. Y., 1941, стр. 235 (где используются единицы MKS).

протекающего по плоскому витку. Произведение $j\,dV$ можно записать в этом случае в виде

$$j\,dV = j\,dS\,dl = i\,d\boldsymbol{l},$$

где i — сила тока, dS — площадь поперечного сечения проволоки, а $d\boldsymbol{l}$ — элементарный вектор, идущий вдоль направления тока. Поэтому магнитный момент будет в данном случае равен

$$\boldsymbol{M} = \frac{i}{c}\frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{l}.$$

Но $\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{l}$ есть элемент площади, описываемой радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ (см. определение секториальной скорости, § 3.2), и поэтому величина этого интеграла равна площади рассматриваемого витка. Обозначив эту площадь через A, а единичный вектор, перпендикулярный к плоскости витка, — через $\boldsymbol{n}$, будем иметь:

$$\boldsymbol{M} = \frac{Ai}{c}\boldsymbol{n}.$$

Это — обычная форма записи магнитного момента плоского витка.

Вернёмся теперь к формуле (5.74). Вместо плотности тока $\boldsymbol{j}$ в неё можно подставить произведение плотности заряда на вектор его скорости. Но плотность заряда равна в свою очередь произведению его массовой плотности ρ на отношение e/m. Поэтому будем иметь:

$$\boldsymbol{j} = \frac{e}{m}\rho\boldsymbol{v}$$

и

$$\boldsymbol{M} = \frac{e}{2mc}\int \boldsymbol{r}\times \rho\boldsymbol{v}\,dV. \tag{5.75}$$

Но написанный интеграл представляет собой полный кинетический момент данного тела. Следовательно, существует однозначное соотношение (по крайней мере в классической физике), связывающее кинетический момент тела с его магнитным моментом *). Оно имеет вид

$$\boldsymbol{M} = \frac{e}{2mc}\boldsymbol{L}. \tag{5.76}$$

Таким образом, уравнение движения (5.73) можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{L}\times\frac{e\boldsymbol{B}}{2mc}. \tag{5.77}$$

*) Квантовая природа «спинового» кинетического момента электрона проявляется в том, что формула (5.76) для него неверна, а верна аналогичная ормула, в которой вместо коэффициента $e/2mc$ стоит коэффициент e/mc,

Но это уравнение в точности совпадает с уравнением, описывающим изменение вектора постоянной длины при его вращении вокруг вектора $\boldsymbol{B}$ с угловой скоростью

$$\omega_l = -\frac{e\boldsymbol{B}}{2mc}. \tag{5.78}$$

Отсюда следует, что однородное магнитное поле заставляет *равномерно прецессировать* вектор кинетического момента заряженного тела. Эта прецессия совершается с угловой скоростью (5.78), известной как *частота Лармора* (Larmor). Для электронов величина e отрицательна, и, следовательно, прецессия вокруг вектора $\boldsymbol{B}$ происходит против часовой стрелки.

Равномерная прецессия заряженного тела, находящегося в магнитном поле, постоянно встречается в атомной физике. Обычно она известна как *прецессия Лармора*. Следует заметить, что мы не требовали, чтобы рассматриваемое тело было твёрдым, так как уравнение (1.24) справедливо для тела любой природы, а интеграл (5.75) является кинетическим моментом относительно какой-либо точки произвольной системы, центр масс которой находится в покое. Поэтому вектор кинетического момента любой системы заряженных частиц, находящихся в однородном магнитном поле, будет прецессировать согласно формуле (5.78). Единственным существенным требованием здесь является то, что все эти частицы должны иметь одинаковое отношение заряда к массе *).

Задачи

1. Исследовать изменение тензора инерции при смещении точки, относительно которой он рассматривается, на величину, определяемую вектором $\boldsymbol{r}_0$. Показать, что если эта точка является центром масс, а $\boldsymbol{r}_0$ направлено вдоль одной из главных осей, то направление главных осей при таком смещении не изменяется. Как изменяются при таком смещении моменты инерции?

2. Однородная пластина имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Вычислить моменты инерции этой пластины относительно главных осей, проходящих через её центр масс. Как направлены эти оси?

3. Три частицы равной массы расположены в точках с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, a, 2a)$ и $(0, 2a, a)$. Найти моменты инерции относительно главных осей, проходящих через начало координат. Как направлены эти оси?

4. Физический маятник представляет собой тонкую пластину, качающуюся в вертикальной плоскости вокруг оси, не проходящей через её центр тяжести. Вычислить период малых колебаний этой пластины, выразив его через радиус инерции относительно центра тяжести и расстояние от центра

*) Заметим, что рассмотренная здесь прецессия относится к вектору кинетического момента, а не к оси тела. Движение последней можно рассмотреть тем же методом, какой применялся в случае тяжёлого волчка. Нутация оси тела здесь также будет иметь место, но в отличие от случая гравитационного поля она не будет изменять кинетической энергии тела, так как однородное магнитное поле не может совершить работу над системой (см. задачу 16).

тяжести до оси вращения. Показать, что если для двух осей вращения, отстоящих на разных расстояниях от центра тяжести, период колебаний будет одинаковым, то сумма этих расстояний будет равна длине математического маятника, имеющего тот же период колебаний.

5. Однородный стержень массы M и длины $2l$ шарнирно прикреплён одним из своих концов к пружине, жёсткость которой равна k. Стержень имеет возможность качаться только в вертикальной плоскости, а пружина может двигаться только в вертикальном направлении. Составить уравнения Лагранжа для этой системы.

6. Однородный стержень скользит концами по гладкой вертикальной окружности. Показать, что если дуга, стягиваемая этим стержнем, равна 120°, то длина эквивалентного математического маятника будет равна радиусу этой окружности.

7. Автомобиль трогается с места с открытой на 90° дверью кабины. Так как петли этой двери расположены в её передней части, то, когда автомобиль начнёт набирать скорость, она захлопнется. Вывести формулу, определяющую время, через которое дверь захлопнется, если ускорение автомобиля постоянно и равно f, радиус инерции двери относительно её оси вращения равен r_0, а центр масс двери отстоит от оси её вращения на расстоянии a. Показать, что если $f = 0{,}3$ *м/сек*^{2}, а дверь представляет однородный четырёхугольник шириной 1,2 *м*, то это время будет равно приблизительно 3 *сек*.

8. Колесо катится вниз по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Получить решение для случая двумерного движения этого колеса, пользуясь уравнением Лагранжа и методом неопределённых множителей.

9. (a) Показать, что если на симметричный волчок не действуют внешние силы, то в системе координат, связанной с этим волчком, вектор его кинетического момента вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω. Показать также, что в неподвижном пространстве ось симметрии волчка вращается вокруг неподвижного вектора кинетического момента с угловой скоростью

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3}{I_1}\,\omega_z,$$

где φ — угол Эйлера, определяющий положение линии узлов в системе, в которой кинетический момент направлен по неподвижной оси z.

(b) Пользуясь результатами задачи 5 из главы 4, показать, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ вращается вокруг неподвижного вектора кинетического момента с той же скоростью $\dot{\varphi}$, а угол θ' между $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{L}$ определяется из равенства

$$\sin\theta' = \frac{\Omega}{\dot{\varphi}}\sin\theta'',$$

где θ'' — угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осью симметрии. Пользуясь числовыми значениями, данными в § 5.6, показать, что ось вращения Земли и ось её кинетического момента никогда не удаляются друг от друга более чем на 15 *мм* (считая по поверхности Земли).

(c) Пусть на симметричный волчок не действуют внешние силы. Пользуясь задачами (a) и (b), показать, что его движение можно воспроизвести с помощью конуса, связанного с волчком и имеющего ось, совпадающую с осью симметрии волчка, если заставить этот конус катиться по неподвижному конусу, ось которого направлена вдоль вектора кинетического момента. Вектор угловой скорости будет при этом направлен вдоль общей образующей этих конусов. Показать, что такое представление непосредственно следует из интерпретации Пуансо.

10. Если свободное твёрдое тело не является симметричным, то аналитическое решение уравнений Эйлера не может быть получено с помощью элементарных функций. Показать, что, используя теоремы о сохранении энергии и кинетического момента, можно выразить составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$ по подвижным осям через эллиптические интегралы.

11. Получить из уравнений движения Эйлера условие (5.70) для симметричного волчка в поле силы тяжести, накладывая требование, чтобы движение волчка представляло собой равномерную прецессию без нутации.

12. Показать, что величину кинетического момента тяжёлого симметричного волчка можно представить как функцию одного только θ и постоянных движения. Доказать, что вектор кинетического момента прецессирует равномерно только тогда, когда имеет место равномерная прецессия оси симметрии.

13. В этой главе указывалось, что предварение равноденствий вызывается моментами, действующими на Земной шар со стороны Солнца и Луны, причём эти моменты появляются вследствие некоторой приплюснутости Земного шара. (Гравитационные силы, действующие на идеальную сферу, не могут создать момента.) Поэтому землю можно приближённо рассматривать как идеальный шар, на который по экватору наложено «кольцо». Массу этого кольца и момент инерции шара нужно выбрать так, чтобы их комбинация имела такие же главные моменты инерции, какие фактически имеет Земля. Момент гравитационных сил, действующих на Землю, будет тогда создаваться только её экваториальным кольцом. Но так как период прецессии Земли весьма велик по сравнению с периодом обращения Луны вокруг Земли и Земли вокруг Солнца, то можно сделать ещё одно приближение, заменив Солнце и Луну массами, распределёнными по окружностям, центры которых совпадают с центром Земли. Кроме того, можно считать, что орбиты Солнца и Луны лежат в одной плоскости (так называемая плоскость эклиптики).

Вычислите гравитационный потенциал

$$V = -G \int\int \frac{dm_e\, dm_s}{r}$$

между экваториальным кольцом Земли и массой Солнца, распределённой по окружности. Воспользуйтесь для этого разложением расстояния r по степеням $\frac{a}{R_s}$, где a — радиус экваториального кольца Земли, а R_s — среднее расстояние от Земли до Солнца. (Для удобства примите плоскость эклиптики за плоскость xy и воспользуйтесь сферическими полярными координатами.) Вычислив аналогичным путём потенциал между Землёй и Луной, найдите полный потенциал гравитационных сил как функцию угла θ между земной осью и плоскостью эклиптики. Дифференцируя этот потенциал по θ, найдите момент сил, действующих на Землю со стороны Солнца и Луны. Покажите, что первый отличный от нуля член в выражении этого момента равен

$$N = \frac{3}{4} G (I_3 - I_1) \sin 2\theta \left[\frac{m_s}{r_s^2} + \frac{m_l}{r_l^3}\right],$$

где G — гравитационная постоянная, а индексы s и l относятся к Солнцу и Луне. Найдите скорость регулярной прецессии, создаваемой таким моментом (пользуясь, например, методом задачи 11), предполагая, что период этой прецессии весьма велик по сравнению с периодом собственного вращения. Сравните этот результат с измеренным периодом прецессии, составляющим 25 800 лет.

14. В § 5.6 вычислялась прецессия оси вращения Земли вокруг полюса в предположении, что на Землю не действуют никакие моменты. С другой стороны, предыдущая задача показывает, что Земля подвергается вынужденной прецессии под действием гравитационных моментов Солнца и Луны.

Можно, однако, показать, что движение оси вращения Земли вокруг её оси симметрии выглядит как нутация Земли и её вынужденной прецессии. Для доказательства этого достаточно вычислить функции $\theta(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для тяжёлого симметричного волчка, у которого начальная скорость $\dot{\varphi}_0$ велика по сравнению со скоростью регулярной прецессии $\beta/2a$, но мала по сравнению с ω_z. При этих условиях граничные окружности апекса будут близки друг к другу, но орбита апекса будет выглядеть так, как показано на фиг. 58, b, т. е. будет иметь большие петли, медленно поворачивающиеся вокруг вертикали. Покажите, что равенство (5.64) будет в этом случае справедливым, но теперь будет иметь место соотношение

$$x_1 = \left(\frac{\beta}{a^2} - \frac{2\dot{\varphi}_0}{a}\right)\sin^2\theta_0.$$

Зная θ и $\dot{\varphi}$, найдите ω_x и ω_y и покажите, что при $\beta/2a \ll \dot{\varphi}_0$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ прецессирует вокруг оси тела со скоростью

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_z,$$

что совпадает с формулой (5.40). Пользуясь числовыми данными, приведёнными в § 5.6, убедитесь в том, что скорость $\dot{\varphi}_0$ соответствует периоду около 1600 лет и, следовательно, она мала по сравнению со скоростью суточного вращения, но достаточно велика по сравнению с величиной $\beta/2a$, соответствующей периоду в 26 000 лет.

15. (Гирокомпас Фуко.) Гироскоп установлен так, что центр тяжести его совпадает с центром карданового подвеса и поэтому гравитационный момент отсутствует. Кроме того, на его ось наложена связь, допускающая движение только в горизонтальной плоскости, вследствие чего она не может сохранять своё направление в неподвижном пространстве и вынуждена участвовать во вращательном движении Земли.

Пользуясь уравнениями Эйлера, покажите, что если скорость вращения этого гироскопа велика по сравнению со скоростью вращения Земли, то ось его будет совершать симметричные колебания около линии меридиана и, следовательно, её можно использовать в качестве стрелки компаса.

16. Система состоит из заряженных частиц с одинаковым отношением e/m. Потенциальная энергия их зависит от их взаимного расположения. На систему действует однородное магнитное поле $\boldsymbol{B}$, причём векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ равен

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}).$$

Вычислить лагранжиан этой системы, пользуясь подвижной системой координат, вращающейся вокруг вектора $\boldsymbol{B}$ со скоростью $\boldsymbol{\omega}_l$. Показать, что с точностью до членов порядка B^2 он не зависит от $\boldsymbol{B}$. (Таким путём можно получить доказательство теоремы Лармора, которая в такой форме показывает, что действие слабого магнитного поля проявляется лишь в прецессии системы в целом вокруг вектора $\boldsymbol{B}$. Как указывалось в тексте, теорема Лармора касается лишь действия магнитного поля на вектор кинетического момента.)

17. Показать, что гамильтониан симметричного заряженного волчка, находящегося в однородном магнитном поле, совпадает с его кинетической энергией и является постоянной движения. Отсюда следует, что это поле не совершает работы над рассматриваемой системой [это видно также из силы Лоренца (1.56)] в противоположность тому, что имеет место в случае тяжёлого волчка, когда сила тяжести сообщает ему дополнительную кинетическую энергию прецессии. Показать, что энергия прецессии магнитного волчка появляется за счёт уменьшения скорости его собственного вращения и что при этом возникает нутация.

Рекомендуемая литература

A. P. Wills, Vector and Tensor Analisis.

В этой и предыдущей главах мы часто встречались с тензорами, диадами и преобразованиями главных осей. Дополнительный материал по этим вопросам, и притом отлично изложенный, можно найти в главах VI, VIII и IX рекомендуемого учебника Уиллса. Наиболее полное изложение этого вопроса содержится в классической работе Gibbs and Wilson, Vector Analysis, 1901.

A. G. Webster, Dynamics.

По динамике твёрдых тел имеется весьма обширная литература, представленная не только книгами, специально посвящёнными этому вопросу, но и общими курсами механики. Большинство таких книг относится к концу прошлого столетия или близко к этому времени, и авторы их следуют традиционному изложению динамики твёрдого тела, развитой к тому времени. Одной из лучших книг этих лет является рекомендуемый общий курс Вебстера (первое издание вышло в 1904 г.). По сравнению с учебником Уиттекера книга Вебстера охватывает бóльший круг вопросов (она содержит теорию потенциала, теорию упругости и гидродинамику), но общий уровень её является более элементарным. Тем не менее, в ней затрагиваются многие современные вопросы. Изложение её является логически последовательным и в меньшей степени формальным, чем у Уиттекера, а также более физическим и более изящным. Векторным аппаратом автор не пользуется, так как в то время, когда писалась эта книга, векторное исчисление практически только зарождалось. Вторая часть этой книги посвящена динамике твёрдого тела и содержит подробное исследование движения симметричного волчка при отсутствии сил. Движение тяжёлого волчка исследуется здесь методом, подобным изложенному в настоящей главе, но более длинно.

E. A. Milne, Vectorial Mechanics.

В отличие от Вебстера автор этой книги широко использует векторный и тензорный аппарат, причём делает это так, что физическая сторона вопроса при этом часто не раскрывается, а затемняется. Глава XIV этого курса посвящена краткому изложению свойств тензора инерции и вычислению этого тензора для различных тел. Кроме того, представляет интерес глава XVII этой книги, посвящённая гироскопическим задачам.

W. D. Macmillan, Dynamics of Rigid Bodies.

Хотя мы не рекомендуем эту книгу для систематического изучения динамики твёрдого тела, тем не менее, в ней содержится много материала, который нелегко найти в других источниках. В частности, в главе VII этой книги содержится полное и подробное описание движения Пуансо, а также движения тяжёлого симметричного волчка, причём получены точные решения, выраженные через эллиптические функции. Кроме того, заслуживает внимания глава, посвящённая некоторым сложным задачам, связанным с качением твёрдых тел.

M. Winkelmann and R. Grammel, Kinetik der Starren Körper. т. V. Hadbuch der Physik.

Основной интерес здесь представляет подробное и ясное исследование движений некоторых тел: волчка, не подверженного действию сил, тяжёлого симметричного волчка с одной неподвижной точкой, бильярдных шаров, вращающейся монеты и т. п. Большой раздел, посвящённый движению гироскопа во вращающейся системе координат (например, на поверхности Земли), будет, к сожалению, недоступен для большинства читателей, так как автор использует необычное векторное понятие — так называемый «motor».

J. L. Synge and B. A. Griffith, Principles of Mechanics.

Основанный на элементарных принципах, этот учебник содержит всё же подробное описание движения Пуансо и движения тяжёлого симметричного волчка. Кроме того, в этой книге имеются некоторые точные формулы, описывающие движение волчка с помощью эллиптических функций. Некоторые небольшие разделы этой книги посвящены качению твёрдых тел и техническим применениям гироскопов (главным образом гирокомпасу).

F. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels.

Книга написана хорошим и лёгким языком. Много внимания в ней уделено объяснению парадоксальных гироскопических явлений. В некоторых местах этой книги изложение ведётся слишком математично, однако авторы никогда не забывают о физической стороне вопроса. Хотя эта книга называется теорией волчка, в ней содержится полное изложение всей механики твёрдых тел, а также некоторых вопросов физики и математики. В главе I этой книги наряду с другими вопросами рассмотрены углы Эйлера, бесконечно малые повороты и параметры Кэйли — Клейна, а также связь этих параметров с гомографическим преобразованием и с теорией квартернионов. Последние замечания к этой главе (в т. IV) посвящены некоторым вопросам электродинамики и специальной теории относительности (квантовая механика возникла значительно позже). В общем в т. I заложен необходимый фундамент динамики твёрдого тела и дана физическая картина движения волчка, которая построена с помощью «малой» математики.

Том II этой книги посвящён подробному исследованию движения тяжёлого симметричного волчка, однако в нём уделяется много внимания и движению Пуансо. Этот том содержит всё, что было в то время известно по теории симметричного волчка. Именно здесь было впервые введено понятие о псевдорегулярной прецессии, причём авторы уделили много внимания рассмотрению связи между регулярной и псевдорегулярной прецессиями. Много страниц этой книги посвящено критике распространённых элементарных «доказательств» прецессии гироскопа. (Авторы указывают, что неудовлетворительность таких доказательств явилась одной из основных причин, побудивших их написать эту книгу.) Кроме того, много места в этом томе уделено вопросам устойчивости движения. Бóльшая часть рассуждений, проводимых авторами, основывается на точных решениях в эллиптических функциях, а не на предположении о малости нутации, как это делается в нашей книге.

Том III посвящён главным образом влиянию возмущающих сил (в основном трению) и астрономическим приложениям теории волчка (нутация Земли, предварение равноденствий и т. д.). Рассматривается также вопрос о блуждании полюсов Земли и оценивается эффект, вызванный её упругостью и перемещением воздушных масс её атмосферы.

Том IV посвящён техническим приложениям гироскопов и с современной точки зрения не представляет ценности.

F. Klein, The Mathematical Theory of the Top.

Эта небольшая книга написана по материалам лекций, которые Ф. Клейн читал в Принстоне в 1896 г. Бóльшая часть книги содержит весьма абстрактное изложение математических подробностей рассматриваемой теории, однако вопрос о параметрах Кэйли — Клейна изложен в легко доступной форме (в первой лекции). Интересно отметить, что в этой работе, так же как и в работе, написанной Клейном совместно с Зоммерфельдом, рассматривается четырёхмерное пространство, в котором время играет роль четвёртого измерения. Спустя несколько лет такое пространство нашло применение в специальной теории относительности (см. следующую главу), однако в этой книге оно вводится исключительно для математического удобства и с ним не связываются никакие физические вопросы.

A. Sommerfeld, Mechanik.

Работа Зоммерфельда, написанная им совместно с Клейном, была одной из первых работ этого автора по теории волчка, тогда как эта книга, опубликованная более чем 40 лет спустя, является одной из последних его работ. Автор, по-видимому, сохранил к тому времени интерес к задаче о волчке. Он отводит в этой книге значительное место качественным исследованиям многих задач, связанных с гироскопическими явлениями, уделяя даже несколько страниц асимметричному волчку.

A. Gray, Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion.

Книга написана подробно и имеет некоторое сходство с книгой Клейна и Зоммерфельда. Однако она изложена значительно менее систематично, читается не так легко и содержит меньше материала. Специальный интерес представляют разделы этой книги, посвящённые наиболее сложным гироскопическим задачам: задачам о стабилизаторах качки кораблей, о полигироскопических системах и о бумерангах.

M. Davidson, The Gyroscope and Its Applications.

В этой книге описываются многие современные (относящиеся к 1947 г.) технические приложения гироскопов (навигационные приборы, автопилоты, приборы управления огнём зенитной артиллерии). Теоретические вопросы изложены элементарно и недостаточно полно.

S. Timoshenko and D. H. Young, Advanced Dynamics.

В последней главе этого недавно вышедшего инженерного учебника рассматривается теория некоторых технических приложений гироскопов, включая современный гирокомпас (значительно отличающийся от того простого гирокомпаса Фуко, который описан в тексте).

ГЛАВА 6

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Наше построение классической механики основывалось на ряде определений и постулатов, данных в главе 1. Однако известно, что при скорости движения, близкой к скорости света, эти постулаты не согласуются с некоторыми опытными фактами. Поэтому они были соответствующим образом изменены, что привело к созданию так называемой *специальной теории относительности*. Изменения, вносимые этой теорией в механику, не являются столь сильными, как изменения, вносимые квантовой механикой. Имеется много физических явлений, в которых квантовые эффекты существенны, а релятивистские поправки ничтожно малы, и много явлений, в которых релятивистские скорости играют существенную роль, а поправки квантовой механики не сказываются на проводимых рассуждениях. Между квантовой теорией и специальной теорией относительности нет внутренней связи, и каждую из них можно рассматривать независимо от другой. В этой главе мы рассмотрим те изменения, которые вносит в классическую механику специальная теория относительности.

Мы не собираемся, однако, дать исчерпывающего изложения специальной теории относительности и получаемых из неё результатов. Мы не будем также подробно говорить о тех фактах и экспериментах, которые приводят к созданию этой теории, и ещё меньше будем касаться её философского смысла, а также её кажущихся парадоксов. Основное внимание мы направим на то, чтобы показать, как специальная теория осноcительности может быть введена в классическую механику. Поэтому мы изложим её лишь в той мере, в какой это необходимо для указанной цели.

§ 6.1. Основная программа специальной теории относительности. В предыдущей главе мы часто употребляли такие выражения, как «неподвижная система» или «система, связанная с неподвижным пространством». В сущности, мы понимали под этим просто *инерциальную* систему, т. е. такую, в которой справедлив закон Ньютона

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{6.1}$$

Система, связанная с телом, вращающимся относительно инерциальной системы координат, очевидно, не удовлетворяет этому условию, так как для того, чтобы уравнение (6.1) было справедливым в такой системе, к нему нужно добавить члены, учитывающие влияние вращения. С другой стороны, можно показать, что система, движущаяся равномерно относительно «неподвижной системы», должна быть инерциальной. Действительно, пусть $\boldsymbol{r}'$ будет вектор, проведённый в данную точку из начала второй системы, а $\boldsymbol{r}$ — аналогичный вектор, проведённый из начала первой системы (рис. 61). Тогда между ними будет иметь место соотношение

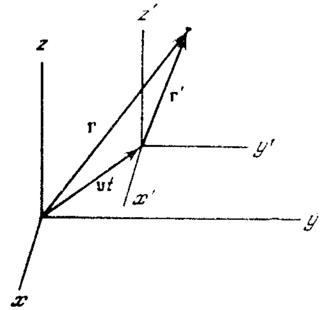

Рис. 61. Преобразование Галилея.

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t, \tag{6.2}$$

а так как относительная скорость $\boldsymbol{v}$ постоянна, то, дифференцируя равенство (6.2), будем иметь:

$$\dot{\boldsymbol{r}}' = \dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{v} \tag{6.3}$$

и

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}. \tag{6.4}$$

Таким образом, ускорение любой точки будет в этих системах одинаковым. Отсюда следует, что если уравнение (6.1) будет справедливым в одной из систем, то оно должно быть справедливым и в другой.

С другой стороны, как показывает преобразование, представляемое уравнениями (6.2), (6.4), известное как *преобразование Галилея*, скорость света должна быть в рассматриваемых системах различной. Пусть, например, в начале системы xyz находится источник света, от которого распространяются сферические волны, движущиеся со скоростью c. Пусть, далее, $\boldsymbol{r}$ будет радиус-вектор некоторой точки на поверхности волны. Тогда скорость этой точки в системе координат xyz будет равна $\dot{\boldsymbol{r}} = c\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{r}$. Но согласно (6.2) скорость волны в системе $x'y'z'$ равна $\dot{\boldsymbol{r}}' = c\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}$. Следовательно, в системе, движущейся относительно источника света, скорость волны в общем случае не будет уже равна c. Кроме того, она будет зависеть от направления, т. е. волна уже не будет сферической.

Целый ряд экспериментов, в особенности известные опыты Майкельсона и Морли, указывает на то, что скорость света одинакова во всех направлениях и не зависит от движения наблюдателя или источника света, а также от среды, в которой распространяется свет. Следовательно, преобразование Галилея нельзя считать правильным, и оно должно быть заменено другим, сохраняющим скорость света постоянной во всех системах. Такое преобразование известно под названием *преобразования Лоренца*. Эйнштейн показал, что оно требует пересмотра привычных представлений о времени и одновременности. Кроме того, он пошёл на дальнейшее обобщение того экспериментального факта, что скорость света постоянна во всех системах. В качестве основного постулата он выдвинул положение, что *все* физические явления должны выглядеть одинаково в системах, движущихся равномерно друг относительно друга. Это так называемый *постулат эквивалентности*, который допускает также следующую формулировку: посредством физических экспериментов нельзя отличить «неподвижную» систему от «равномерно движущейся», а можно лишь констатировать, что эти системы движутся *друг относительно друга*. Таким образом, постулат эквивалентности требует, чтобы формулировка каждого физического закона была одинаковой во всех системах, движущихся друг относительно друга равномерно. Примером может служить утверждение о постоянстве скорости света c во всех таких системах. Это означает, что волновое уравнение

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0,$$

описывающее распространение света, должно быть справедливым в каждой из этих систем.

Мы видели, что уравнения движения Ньютона инвариантны только при преобразовании Галилея, которое, как мы знаем, нельзя считать верным. Поэтому априори весьма вероятно, что эти уравнения, а возможно и другие известные законы физики не будут сохранять своей формы при преобразовании Лоренца. Из постулата эквивалентности следует, что такие законы не дают правильного отражения опытных фактов, и их следует так обобщить, чтобы они были инвариантными относительно преобразования Лоренца. Конечно, эти обобщения должны быть такими, чтобы для скоростей, значительно меньших скорости света, они переходили в классические законы, так как при этих скоростях преобразование Галилея является приближённо верным.

Таким образом, мы имеем дело с двумя задачами специальной теории относительности. Во-первых, нужно получить преобразование, связывающее две системы, движущиеся друг относительно друга равномерно, сделав это так, чтобы скорость света оставалась при этом преобразовании постоянной. Во-вторых, нужно проверить, будут ли законы физики инвариантными относительно найденного преобразования. Те законы, которые не будут обладать такой инвариантностью, нужно будет так обобщить, чтобы они удовлетворяли постулату эквивалентности.

К настоящему времени теория относительности получила достаточную опытную проверку, благодаря чему её фундаментальные положения следует считать обоснованными.

§ 6.2. Преобразование Лоренца. Рассмотрим две системы, равномерно движущиеся одна относительно другой. Пусть при $t=0$ начала этих систем совпадают и пусть источник света, находящийся в начале системы xyz, посылает в этот момент импульс света. Наблюдатель, находящийся в этой системе, обнаружит при этом, конечно, сферическую волну света, распространяющуюся со скоростью c. Уравнение фронта этой волны имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2. \tag{6.5}$$

Но опыт показывает, что скорость света одинакова во всех системах. Следовательно, наблюдатель, находящийся в системе, движущейся относительно источника света, также будет видеть сферическую световую волну, распространяющуюся из начала системы $x'y'z'$; уравнение фронта этой волны будет иметь вид

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2, \tag{6.6}$$

где t' — время в системе $x'y'z'$. Таким образом, мы допускаем возможность изменения масштаба времени при переходе от одной системы к другой. Более подробно это можно высказать следующим образом: преобразование, посредством которого уравнение (6.6) получается из уравнения (6.5), может быть таким, что интервал времени между двумя событиями будет зависеть от системы отсчёта, в которой находится наблюдатель. Из уравнений (6.5) и (6.6) следует, что искомое преобразование должно удовлетворять условию

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2. \tag{6.7}$$

Это равенство напоминает условие ортогональности преобразования [см. формулу (4.13)], и для того, чтобы подчеркнуть это сходство, мы будем писать не xyz, а $x_1x_2x_3$. Тогда равенство (6.7) примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2-c^2t^2=\sum_{i=1}^{3} x_i'^2-c^2t'^2. \tag{6.7$'$}$$

Сравнение равенств (6.7′) и (4.13) указывает на целесообразность формального введения четвёртой координаты x_4, равной мнимой величине ict. Тогда мы получим ещё большее сходство с пространственным ортогональным преобразованием, так как равенство (6.7′) примет вид

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2=\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu'^2. \tag{6.8}$$

Это равенство показывает, что искомое преобразование можно мыслить как вращение в четырёхмерном пространстве, три измерения которого являются измерениями обычного пространства, а четвёртое является мнимым и пропорционально времени t. Это пространство известно как *пространство Минковского.* Следовательно, преобразование Лоренца является ортогональным преобразованием пространства Минковского. Поэтому весь математический аппарат главы 4, относящийся к ортогональным преобразованиям пространства, можно применить и к преобразованию Лоренца.

Допустим, что мы переходим от одной системы координат к другой, покоящейся относительно первой, но повёрнутой относительно неё. Ясно, что преобразование, описывающее этот переход, также является преобразованием Лоренца. Чисто лоренцовым мы будем называть такое преобразование Лоренца, которое не содержит пространственного вращения, а связывает две равномерно движущиеся друг относительно друга системы, оси которых параллельны. Ясно без специального доказательства *), что любое преобразование Лоренца есть произведение пространственного вращения на чисто лоренцово преобразование. Поэтому достаточно рассмотреть только чисто лоренцово преобразование, причём относительную скорость рассматриваемых систем можно, не уменьшая общности, считать направленной вдоль оси x_3 (так как этого всегда можно добиться с помощью соответствующего поворота координатных осей). Рассмотрим матрицу этого преобразования и обозначим её элементы через $a_{\mu\nu}$ **). Тогда будем иметь:

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu. \tag{6.9}$$

Элементы $a_{\mu\nu}$ должны, конечно, удовлетворять таким же условиям ортогональности, какие мы имели для пространственных поворотов [см. уравнение (4.37)]. Поэтому можно написать:

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}. \tag{6.10}$$

Однако в отличие от обычного ортогонального преобразования пространства теперь не все эти элементы являются вещественными. Действительно, так как координаты $x'_1 x'_2 x'_3$ должны быть вещественными, то элементы a_{i4} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ должны, очевидно, быть мнимыми. Кроме того, так как x'_4 должно быть мнимым, то ясно, что элементы a_{4i} должны также иметь мнимые значения, тогда как элемент a_{44}, очевидно, должен быть вещественным.

В направлениях, перпендикулярных к движению, преобразование, очевидно, ничего не меняет, и поэтому можно написать:

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2.$$

---

*) См. R. Becker, Theorie der Elektrizität, т. II, 6-е изд., Лейпциг, 1933, стр. 287.

**) Греческие буквы μ, ν, λ и т. д. мы будем применять для обозначения индексов, пробегающих значения от 1 до 4, а латинские буквы i, j, k и т. д. — для индексов, изменяющихся от 1 до 3. Такие обозначения стали сейчас общепринятыми.

Вследствие этого при рассматриваемом преобразовании будут изменяться только координаты x_3 и x_4. Кроме того, ясно, что ни координата x'_3, ни координата x'_4 не будут зависеть от координат x_1 и x_2, в чём можно убедиться с помощью следующих общих соображений. Ни одна из точек плоскости x_1x_2 не является привилегированной, и поэтому нет физических соображений, заставляющих какую-либо одну из них обязательно считать началом координат. Поэтому начало координат можно перенести в любую точку плоскости x_1x_2, не изменяя при этом величин x'_3 и x'_4. Но так как такой перенос *изменит* значения величин x_1 и x_2, то эти координаты не могут входить в уравнения, определяющие x'_3 и x'_4. На основании всего сказанного мы приходим к выводу, что матрицу чисто лоренцова преобразования можно записать в виде

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}.$$

Поэтому мы будем иметь следующие три условия ортогональности, связывающих четыре элемента матрицы:

$$\left.\begin{aligned} a_{33}^2 + a_{34}^2 &= 1, \\ a_{43}^2 + a_{44}^2 &= 1, \\ a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Для того чтобы однозначно определить эти элементы, необходимо иметь четвёртое условие. Оно может быть получено из того факта, что начало координат системы $x'_1x'_2x'_3$ $(x'_3 = 0)$ движется вдоль оси x_3 таким образом, что в момент t его координата x_3 равна

$$x_3 = vt = -i\beta x_4,$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}. \tag{6.12}$$

Учитывая это, мы можем написать следующее равенство, определяющее начало системы $x'_1x'_2x'_3$:

$$x'_3 = x_4(a_{34} - i\beta a_{33}) = 0.$$

Отсюда получаем

$$a_{34} = i\beta a_{33},$$

и поэтому первое из условий ортогональности (6.11) можно будет записать в виде

$$a_{33}^2(1 - \beta^2) = 1.$$

Следовательно,

$$a_{33}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{6.13}$$

и поэтому

$$a_{34}=\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{6.14}$$

Заметим, что число a_{33} является вещественным, а число a_{34} — мнимым, что согласуется с требованием вещественности преобразованных пространственных координат.

Два остальных элемента матрицы могут быть найдены посредством решения второго и третьего уравнений (6.11) относительно a_{43} и a_{44}. Последнее из этих уравнений даёт

$$a_{43}=-a_{44}\frac{a_{34}}{a_{33}}=-i\beta a_{44}.$$

Подставив этот результат во второе уравнение (6.11), найдём

$$a_{44}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

и следовательно,

$$a_{43}=\frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Таким образом, матрица преобразования Лоренца имеет вид *)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{Vmatrix}. \tag{6.15}$$

Заметим, что в её составе содержится матрица, имеющая вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

т. е. являющаяся матрицей поворота в плоскости x_3x_4. Однако угол этого поворота является мнимым, так как здесь

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.16}$$

и, следовательно, больше единицы.

*) Радикал, фигурирующий в коэффициентах a_{44} и a_{33}, мы берём со знаком плюс. Это сделано для того, чтобы при $\beta\to 0$ матрица (6.15) переходила в единичную матрицу. Нас интересует только получение собственных преобразований Лоренца с детерминантом $+1$.

Формулы преобразования Лоренца можно записать также в виде:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Что касается обратного преобразования, т. е. перехода от x'_μ к x_μ, то оно может быть получено посредством простого транспонирования матрицы (6.15). Из вида этой матрицы следует, что формулы обратного преобразования будут отличаться от формулы (6.17) только знаком скорости v. Этот результат следовало ожидать, исходя из чисто физических соображений, ибо скорость, с которой система $x_1x_2x_3$ движется относительно системы $x'_1x'_2x'_3$, равна $-v$.

Если исходить из обычных представлений, то наиболее парадоксальной должна казаться та формула (6.17), которая описывает связь между t и t'. Действительно, согласно этой формуле два события, происшедшие одновременно в двух различных точках пространства, в системе $x_1x_2x_3$ будут казаться наблюдателю, находящемуся в системе $x'_1x'_2x'_3$, неодновременными, что объясняется присутствием члена vz/c^2 в последней формуле (6.17). В задачи нашей книги не входит рассмотрение физического существа этого, а также других кажущихся парадоксов преобразования Лоренца *), однако два известных следствия этого преобразования мы считаем нужным отметить: это уменьшение длины (эффект Лоренца—Фицджеральда) и увеличение масштаба времени.

Рассмотрим твёрдый стержень, находящийся в покое в системе xyz и расположенный вдоль её оси z. Пусть длина этого стержня будет равна $l = z_2 - z_1$. Если движущийся наблюдатель пожелает измерить длину этого стержня, то он станет определять в системе $x'y'z'$ координаты его концов, т. е. величины z'_1 и z'_2 в момент t'. Но согласно формулам обратного преобразования

$$z_1 = \frac{z'_1 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и

$$z_2 = \frac{z'_2 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

*) См. P. Bergmann, An Introduction to the Theory of Relativity, 1942, Нью-Йорк (имеется русский перевод: Бергман П., Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947) и цитированную на стр. 209 книгу Р. Беккера.

Следовательно, кажущаяся длина этого стержня будет равна

$$z_2' - z_1' = l\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (6.18)$$

Таким образом, движущемуся наблюдателю стержень будет казаться укороченным в отношении $1:\sqrt{1-\beta^2}$. Этот результат составляет содержание известной гипотезы Лоренца—Фицджеральда о «сжатии». Заметим, что при выводе формулы (6.18) было бы неудобно пользоваться непосредственно уравнениями (6.17), так как, хотя движущийся наблюдатель измеряет координаты концов стержня в один и тот же момент t', однако в системе xyz эти измерения нельзя считать производящимися одновременно, так как величины z_1 и z_2 различны.

Предположим теперь, что в системе xyz находятся часы, расположенные в точке z_1 и показывающие время t_1. Наблюдатель, связанный с подвижной системой, зафиксирует в этот момент время

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{vz_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

а в момент t_2

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{vz_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Поэтому кажущийся промежуток времени будет равен

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (6.19)$$

Следовательно, когда стрелка неподвижных часов передвинется на один час, с точки зрения движущегося наблюдателя пройдёт время $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ часов. Поэтому он скажет, что неподвижные часы отстают, т. е. что они теряют время. Таким образом, это явление можно характеризовать как «растяжение времени». Следует, однако, подчеркнуть, что наблюдатель, находящийся в системе xyz, тоже будет считать, что часы, связанные с системой $x'y'z'$, отстают от его часов. Точно такая же картина имеет место и для эффекта Лоренца в отношении сокращения длины: наблюдатель, находящийся в системе xyz, тоже будет наблюдать сжатие (6.18) предметов, неподвижных относительно системы $x'y'z'$. Таким образом, ни одну из рассмотренных систем мы не можем считать неподвижной и противопоставлять её другой системе — движение является относительным и все (равномерно движущиеся) системы совершенно эквивалентны.

Из преобразования Лоренца следует также, что невозможна относительная скорость больше c. В самом деле, если бы тело имело такую скорость относительно некоторой системы, то посредством соответствующего преобразования Лоренца можно было бы перейти к другой системе, в которой это тело неподвижно. Но при $\beta > 1$ преобразование Лоренца не приводит к вещественным значениям координат. Следовательно, скорости, бóльшие скорости света, не могут иметь места.

Может показаться, что скорость, бóльшую скорости света c, можно получить с помощью двух последовательных преобразований Лоренца. Пусть, например, вторая система движется относительно первой со скоростью $v_1 > c/2$, а третья система движется относительно второй со скоростью v_2, также большей, чем $c/2$ (в том же направлении). Можно подумать, что скорость третьей системы относительно первой будет тогда больше чем c. Однако это не так, ибо эта скорость не равна просто $v_1 + v_2$. Чтобы убедиться в этом, достаточно найти преобразование Лоренца, описывающее переход от первой системы к третьей. Перемножая для этого матрицы рассматриваемых преобразований, мы найдём полное преобразование и увидим, что оно соответствует скорости v_3, определяемой так называемым законом Эйнштейна для сложения скоростей. Согласно этому закону

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}},$$

или

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \tag{6.20}$$

Отсюда видно, что если β_1 и β_2 меньше единицы, то β_3 также будет меньше единицы. Вывод формулы (6.20) мы предоставляем читателям провести самостоятельно в качестве упражнения.

§ 6.3. Ковариантная форма уравнений. Преобразование Лоренца получено нами для замены преобразования Галилея, так как последнее нельзя считать правильным. Теперь мы можем перейти ко второй части нашего исследования и рассмотреть вопрос о принципе эквивалентности, требующем, чтобы законы механики (и вообще законы физики) имели одинаковую форму во всех равномерно движущихся системах. Таким образом, мы должны исследовать законы физики в отношении инвариантности их формы при преобразованиях Лоренца. Эта задача сильно облегчается, если, формулируя эти законы, пользоваться понятием четырёхмерного пространства Минковского, введённого в предыдущем параграфе. Мы увидим, что инвариантность данных уравнений относительно преобразований Лоренца тогда можно будет установить непосредственным путём.

Иивариантность формы уравнения относительно преобразований Лоренца не является единственной инвариантностью, накладываемой на законы физики. Ясно, *например, что физическое содержание* любого закона не должно изменяться при изменении ориентации выбранной системы координат. Следовательно, законы физики должны также быть инвариантными и относительно поворотов системы координат, т. е. относительно ортогональных преобразований пространства. Эта инвариантность является более простой и исследование её сделает более ясным тот метод, которого следует придерживаться при исследовании инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Мы не беспокоимся обычно об инвариантности наших законов относительно поворотов системы координат. Это связано с тем, что при составлении какого-либо уравнения всегда требуется, чтобы его слагаемые были либо *все* скалярами, либо *все* векторами, либо *все* тензорами одного ранга, а это автоматически обеспечивает инвариантность относительно поворотов координатной системы. Так, например, скалярное равенство имеет вид

$$a = b,$$

а так как обе части его являются скалярами, то они инвариантны относительно координатной системы и, следовательно, это равенство остаётся справедливым во всех системах координат. Рассмотрим теперь векторное равенство

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G},$$

эквивалентное трём равенствам

$$F_i = G_i,$$

связывающим составляющие этих векторов. Значения этих составляющих не являются, конечно, инвариантными относительно поворотов системы координат, и поэтому в результате такого поворота они примут значения F'_i и G'_i, которые являются составляющими преобразованных векторов $\boldsymbol{F}'$ и $\boldsymbol{G}'$. Но так как обе части равенств, связывающих эти составляющие, преобразуются идентичным образом, то будут иметь место равенства

$$F'_i = G'_i.$$

Следовательно, равенство, связывающее два вектора, остаётся справедливым при любом повороте системы координат, и в новой системе мы будем иметь:

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{G}'.$$

Следует заметить, что инвариантность этого равенства есть следствие того факта, что обе его части преобразуются как векторы. В таких случаях говорят, что рассматриваемое равенство является *ковариантным*. Аналогично, всякое равенство

$$\mathsf{C} = \mathsf{D},$$

связывающее тензоры второго ранга, означает также равенство

$$\mathbf{C}' = \mathbf{D}',$$

связывающее преобразованные тензоры, так как при повороте системы координат тензоры преобразуются ковариантно. В противоположность этому уравнение, связывающее составляющую вектора с составляющей тензора, очевидно, не может оставаться инвариантным при трёхмерном ортогональном преобразовании. *Инвариантность физического закона относительно поворота пространственной системы координат требует ковариантности выражающего его уравнения.*

Преобразование Лоренца можно рассматривать как ортогональное преобразование в пространстве Минковского. В этом четырёхмерном пространстве можно говорить о скалярах, векторах и тензорах любого ранга, обобщая на них (очевидным образом) те преобразования, которые мы имели для аналогичных величин в трёхмерном пространстве. Так, например, мы будем говорить о *четырёхмерных векторах* или короче о 4-*векторах* и т. п. Инвариантность физического закона относительно преобразований Лоренца можно сделать тогда очевидной, если выразить этот закон в *ковариантной четырёхмерной форме*; все члены уравнения, выражающего этот закон, должны быть при этом тензорами одного ранга. Если же закон не удовлетворяет требованиям принципа эквивалентности, то ему нельзя будет придать ковариантную форму. Следовательно, характер преобразования (в четырёхмерном пространстве) членов равенства, выражающего физический закон, даёт нам критерий для решения вопроса о релятивистской правильности этого закона.

Важным примером 4-вектора является вектор, определяющий положение точки в пространстве Минковского. Составляющие этого вектора равны x_1, x_2, x_3, x_4, и во избежание путаницы с обычными векторами мы для обозначения 4-вектора будем пользоваться только одной из его составляющих; поэтому символ x_μ будет означать у нас вектор, составляющие которого равны x_1, x_2, x_3, x_4. Кроме того, мы часто будем пользоваться следующим условным способом для обозначения суммирования: если в каком-нибудь члене будут встречаться одинаково обозначенные индексы, то это будет означать, что указанный член суммируется по всем значениям этого индекса (даже если знак суммы отсутствует). Например, символ $x_\mu x_\mu$ мы будем употреблять для суммы

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2.$$

Когда материальная точка движется в обычном трёхмерном пространстве, то соответствующая ей точка в пространстве Минковского описывает траекторию, известную под названием *мировой* *линии.* 4-вектор dx_μ, очевидно, есть вектор бесконечно малого перемещения вдоль этой линии. Умножив вектор dx_μ скалярно на самого себя и разделив полученное число на $-c^2$, мы можем образовать мировой скаляр (и, следовательно, инвариант Лоренца). Обозначив его через $d\tau^2$, будем иметь

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2}\sum_\mu (dx_\mu)^2. \tag{6.21}$$

Физический смысл величины $d\tau$ станет ясным, если вычислить сумму (6.21) в системе, относительно которой рассматриваемая точка в данный момент неподвижна. В этой системе мы будем иметь дело с преобразованным вектором dx'_μ, составляющие которого равны $(0,\ 0,\ 0,\ icdt')$. Следовательно, инвариант $d\tau^2$ равен

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2}\sum_\mu \left(dx'_\mu\right)^2 = (dt')^2.$$

Таким образом, $d\tau$ есть интервал времени, измеренный по часам, движущимся вместе с рассматриваемой точкой *); поэтому его можно назвать *собственным временем* этой материальной точки.

Связь между $d\tau$ и интервалом времени в данной системе Лоренца можно получить, раскрывая равенство (6.21). Проделав это, будем иметь

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2}\left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2\right],$$

или

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]},$$

что эквивалентно равенству

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = dt. \tag{6.22}$$

Равенство (6.22) вытекает также и из формулы (6.19), если $d\tau$ интерпретировать как интервал времени, измеряемый по часам, связанным с точкой, а dt — как соответствующий интервал, измеряемый наблюдателем, движущимся относительно этой точки.

Так как одна из составляющих 4-вектора является мнимой, то квадрат его не обязательно будет числом положительным. Те 4-векторы, квадраты которых неотрицательны, называются *пространственно-подобными*, а те, квадраты которых имеют отрицательную величину, называются *временно-подобными* векторами. Заметим, что принадлежность вектора к тому или иному из этих классов сохраняется при любом преобразовании Лоренца, так как величина

*) Под $d\tau$ мы понимаем положительный корень из правой части (6.21).

вектора является мировым скаляром. Названия пространственно-подобный и временно-подобный связаны с тем, что квадрат обычного вектора трёхмерного пространства является величиной положительной. Кроме того, пространственно-подобный 4-вектор всегда можно так преобразовать, чтобы его четвёртая составляющая обратилась в нуль.

Разность векторов, определяющих две точки пространства Минковского, может быть либо пространственно-подобной, либо временно-подобной. Обозначая эту разность через X_μ, будем иметь:

$$X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu},$$

где индексы 1 и 2 обозначают первую и вторую из рассматриваемых точек. Но величина вектора X_μ равна

$$X_\mu X_\mu = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2 - c^2(t_1 - t_2)^2.$$

Следовательно, вектор X_μ будет пространственно-подобным, если

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2 \geqslant c^2(t_1 - t_2)^2,$$

и временно-подобным, если

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2 < c^2(t_1 - t_2)^2.$$

Отсюда видно, что если вектор X_μ является временно-подобным, то рассматриваемые точки пространства Минковского можно соединить световым сигналом; если же он является пространственно-подобным вектором, то их нельзя связать волной, распространяющейся со скоростью c.

Выберем оси $x_1x_2x_3$ таким образом, чтобы разность $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ была направлена вдоль оси x_3. Тогда $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ будет равно $z_1 - z_2$. Рассмотрим теперь преобразование Лоренца, соответствующее скорости v, направленной вдоль оси z. Четвёртая составляющая вектора X_μ будет при этом преобразовываться согласно равенству

$$c\left(t_1' - t_2'\right) = \frac{c(t_1 - t_2) - \frac{v}{c}(z_1 - z_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

[см. последнее уравнение (6.17)]. Отсюда видно, что если вектор X_μ является пространственно-подобным и, следовательно,

$$c(t_1 - t_2) < z_1 - z_2,$$

то можно найти такую скорость $v < c$, что $ic\left(t_1' - t_2'\right) \equiv X_4'$ будет равно нулю (как указывалось выше). Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Точку пространства Минковского можно рассматривать как определяющую некоторое событие, происходящее в данный момент t в данной точке $\boldsymbol{r}$. Короче можно сказать, что точка пространства Минковского описывает *событие*. Поэтому полученный результат можно сформулировать следующим образом: если расстояние между двумя событиями является пространственно-подобным, *то можно найти такую систему Лоренца, в которой эти события происходят одновременно.*

Одним из примеров 4-вектора может служить так называемый вектор 4-скорости. Он по определению равен

$$u_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau}, \tag{6.23}$$

где x_ν — 4-вектор данной материальной точки, а τ — её собственное время. Пространственная и временна́я составляющие вектора u_ν равны:

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.24}$$

Величина 4-скорости является постоянной, так как сумма $u_\nu u_\nu$ равна

$$u_\nu u_\nu = \frac{v^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2}{1-\beta^2} = -c^2. \tag{6.25}$$

Отсюда видно, что вектор u_ν также является временно-подобным.

В качестве иллюстрации ковариантной четырёхмерной формулировки физического закона рассмотрим волновое уравнение

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \tag{6.26}$$

где ψ — некоторый скаляр. Введём теперь по аналогии с трёхкомпонентным оператором ∇ *четырёхкомпонентный дифференциальный оператор* $\square$, понимая под ним векторный оператор, составляющие которого равны

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Легко показать, что вектор $\square$ преобразуется по правилам преобразования 4-векторов. Действительно, согласно правилам дифференцирования частная производная по преобразованной координате x'_μ равна

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}. \tag{6.27}$$

Но на основании формул обратного преобразования (от x'_μ к x_ν) имеем

$$x_\nu = \sum_\mu a_{\mu\nu} x'_\mu.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu},$$

и поэтому формула (6.27) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \sum_\nu a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

что совпадает с формулой для преобразования составляющих 4-вектора. Скалярное произведение вектора $\Box$ на самого себя мы будем обозначать через $\Box^2$. Это есть так называемый *оператор Даламбера*. Из предыдущего следует, что он является инвариантным скалярным оператором. В развёрнутой форме он имеет вид

$$\Box^2 = \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Сравнивая теперь полученное выражение с левой частью уравнения (6.26), мы видим, что это уравнение можно записать в виде

$$\Box^2 \psi = 0. \tag{6.28}$$

Отсюда следует, что если ψ есть истинный скаляр пространства Минковского, то волновое уравнение (6.26) будет инвариантно относительно преобразований Лоренца.

§ 6.4. Уравнение движения и уравнение энергии в релятивистской механике. Мы видели, что уравнения движения Ньютона являются инвариантными относительно преобразования Галилея, но не являются инвариантными относительно преобразований Лоренца. Поэтому их нужно соответствующим образом обобщить и получить закон, удовлетворяющий принципу эквивалентности. Конечно, это обобщение должно быть таким, чтобы при скоростях, малых по сравнению с c, новые уравнения переходили в обычные уравнения Ньютона

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = F_i. \tag{6.29}$$

Пространственные составляющие 4-вектора образуют некоторый вектор трёхмерного пространства, так как преобразование Лоренца с коэффициентами $a_{4i} = a_{i4} = 0$, $a_{44} = 1$ есть обычный пространственный поворот, влияющий только на пространственные составляющие 4-вектора. Обратное утверждение будет, однако, неверным: составляющие вектора трёхмерного пространства не обязательно преобразуются как пространственные составляющие 4-вектора. Составляющие обычного вектора можно умножить на любую функцию β, не изменяя характера их преобразования при пространственном повороте. Но при этом существенно меняется характер того преобразования, которому подвергаются эти составляющие при преобразовании Лоренца. Так, например, пространственные составляющие 4-скорости u_ν образуют вектор $\boldsymbol{v}/\sqrt{1-\beta^2}$, однако сам вектор $\boldsymbol{v}$ не является частью 4-вектора, так как для этого его нужно разделить на $\sqrt{1-\beta^2}$.

Уравнение (6.29) не является инвариантным относительно преобразований Лоренца. Однако можно ожидать, что его релятивистским обобщением будет такое 4-векторное уравнение, пространственная часть которого сведётся к (6.29) при $\beta \to 0$. Мы сейчас увидим, что 4-векторное обобщение левой части этого уравнения получить нетрудно. Единственным 4-вектором, пространственная часть которого сводится при $\beta \to 0$ к $\boldsymbol{v}$, является вектор 4-скорости u_ν. Кроме того, массу m можно считать некоторой инвариантной величиной, характеризующей данную материальную точку, а время t хотя и не является инвариантом Лоренца, однако его можно, очевидно, заменить на собственное время τ, которое стремится к t при $\beta \to 0$. Поэтому искомое обобщение уравнения Ньютона должно иметь вид

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\nu) = K_\nu, \tag{6.30}$$

где K_ν — некоторый 4-вектор, известный как *сила Минковского*.

Не следует думать, что пространственные составляющие 4-вектора K_ν можно отождествить с составляющими обычной силы. Единственное, что здесь требуется уравнением (6.29), — это то, чтобы при $\beta \to 0$ составляющие K_i стремились к составляющим F_i. Так, например, K_i может равняться произведению F_i на некоторую функцию от β, стремящуюся к единице при $\beta \to 0$. Точные соотношения здесь, конечно, зависят от характера преобразования Лоренца для составляющих сил. К решению рассматриваемой задачи можно подойти двумя путями.

Первый из них состоит в следующем. Прежде всего заметим, что все известные силы имеют лишь несколько физических источников: либо они являются гравитационными, либо электромагнитными, либо, возможно, ядерными. Целью правильно построенной теории этих сил является дать для них соответствующие выражения, и если они будут даны в ковариантной форме, то тем самым станут ясными правила преобразования составляющих этих сил. К сожалению, однако, мы не имеем ковариантно построенных теорий для всех перечисленных сил, а что касается ядерных сил, то здесь мы вообще не имеем какой-либо теории, заслуживающей того, чтобы о ней говорить. И лишь только классическая теория электромагнетизма, можно надеяться, даст нам ковариантные выражения для сил, так как преобразования Лоренца были построены как раз так, чтобы сохранялась инвариантность электромагнитных процессов. Но этого для нас достаточно, так как правила преобразования должны быть, конечно, одинаковыми для сил любой природы. Если все силы преобразовываются по одному правилу, то утверждение «точка находится в равновесии под действием двух сил» должно быть справедливым во всех лоренцовых системах.

В § 1.5 мы видели, что электромагнитная сила, действующая на частицу, равна

$$F_i = -q\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right) + \frac{1}{c}\frac{dA_i}{dt}\right], \tag{6.31}$$

где φ и $\boldsymbol{A}$ — скалярный и векторный электромагнитные потенциалы. Можно показать, что инвариантность скорости света требует, чтобы вектор $\boldsymbol{A}$ и скаляр $i\varphi$ преобразовывались как пространственная и временна́я части некоторого 4-вектора, который мы будем обозначать через A_μ. В соответствии с этим выражение $\varphi - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$ может быть записано в ковариантной форме

$$\varphi - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\sqrt{1-\beta^2}\,u_\nu A_\nu, \tag{6.32}$$

и тогда будем иметь

$$F_i = -\frac{q}{c}\sqrt{1-\beta^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(u_\nu A_\nu) + \frac{dA_i}{d\tau}\right]. \tag{6.33}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, преобразовывается как пространственная часть 4-вектора. Поэтому F_i равно произведению $\sqrt{1-\beta^2}$ на пространственную часть 4-вектора, который следует отождествить с силой Минковского K_μ. Следовательно, связь между обычной силой и силой Минковского должна выражаться равенством

$$F_i = K_i\sqrt{1-\beta^2}, \tag{6.34}$$

которое следует считать справедливым для сил любой природы.

Из изложенного следует также, что на заряженную частицу действует сила Минковского, равная

$$K_\mu = \frac{q}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}(u_\nu A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau}\right].$$

Рассмотрим теперь другой вывод уравнения движения. На этот раз мы не будем пользоваться физической теорией, выходящей за рамки механики, а просто определим силу как скорость изменения количества движения в лоренцовой системе. Тогда будем иметь

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i. \tag{6.35}$$

Однако фигурирующее здесь количество движения нельзя считать равным mv_i, а нужно рассматривать как некоторое релятивистское обобщение этого понятия, сводящееся к mv_i при $\beta \to 0$. Льюис и Толмэн *) получили выражение для релятивистского количества дви-

*) См. ранее цитированную книгу Бергмана, стр. 87.

жения, не обращаясь к равенству (6.30). Они исходили из того, что следствием равенства (6.35) является сохранение количества движения при отсутствии внешних сил. Поэтому они рассматривали упругий удар двух частиц и нашли такую форму для p_i, при которой имеет место такое сохранение.

Если уравнение движения записывать в форме (6.30), то силу K_i и релятивистское количество движения p_i можно будет получить, представляя (6.30) в форме, схожей с (6.35). Из определения 4-скорости и из соотношения между τ и t следует, что пространственную часть уравнения (6.30) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=K_i\sqrt{1-\beta^2}.$$

Сравнивая теперь это равенство с равенством (6.35), мы видим, что для того, чтобы была справедливой теорема о количестве движения, достаточно положить

$$p_i=\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.36}$$

и связать F_i и K_i соотношением (6.34). Заметим, что при $\beta\to 0$ правая часть равенства (6.36) переходит в mv_i.

Таким образом, исходя из различных соображений, мы пришли к одному и тому же результату.

До сих пор мы рассматривали только пространственную часть уравнения движения и ничего не говорили о физическом смысле четвёртой составляющей силы Минковского. Её можно получить, умножая (6.30) скалярно на 4-скорость. Проделав это, будем иметь

$$u_\nu\frac{d}{d\tau}(mu_\nu)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m}{2}u_\nu u_\nu\right)=K_\nu u_\nu. \tag{6.37}$$

Но так как квадрат вектора u_ν есть величина постоянная, равная $-c^2$ [см. уравнение (6.25)], а m также постоянно, то будем иметь

$$K_\nu u_\nu\equiv\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{1-\beta^2}+\frac{icK_4}{\sqrt{1-\beta^2}}=0.$$

Следовательно, четвёртая составляющая силы Минковского будет равна

$$K_4=\frac{i}{c}\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{6.38}$$

а четвёртое уравнение (6.30) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{6.39}$$

Кинетическую энергию T мы определим таким образом, чтобы $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ (скорость, с которой действующая на точку сила совершает работу) была равна производной $\frac{dT}{dt}$. Таким образом, будем иметь

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{6.40}$$

Это определение согласуется с тем нерелятивистским определением кинетической энергии, которое даётся известной формулой $T = \frac{1}{2} mv^2$. Сравнивая теперь равенства (6.40) и (6.39), мы видим, что релятивистскую кинетическую энергию следует считать равной

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.41}$$

Когда β^2 мало по сравнению с единицей, формула (6.41) переходит в формулу

$$T \to mc^2\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \tag{6.42}$$

не согласующуюся с ожидаемой нерелятивистской формулой $T = \frac{1}{2} mv^2$ и отличающуюся от неё дополнительным членом mc^2. На первый взгляд, однако, может показаться, что этот член не имеет существенного значения, так как, не нарушая равенства (6.40), мы можем добавить к правой части (6.41) любую константу, в частности равную $-mc^2$. Но тогда правая часть формулы (6.42) обратится в $\frac{1}{2} mv^2$, и мы получим совпадение с нерелятивистским выражением кинетической энергии. Однако T предпочтительнее всё же определять согласно формуле (6.41), ибо тогда количество движения $\boldsymbol{p}$ [см. уравнение (6.36)] и iT/c будут образовывать 4-*вектор пространства Минковского*. Это будет вектор p_ν, определяемый равенством

$$p_\nu = mu_\nu. \tag{6.43}$$

Отсюда следует, что если количество движения p_i остаётся постоянным, то определяемая формулой (6.41) энергия T также будет постоянной. В противном случае можно было бы перейти к другой системе, и тогда по формулам преобразования Лоренца мы получили бы новые составляющие p'_i, выражающиеся через p_i и T, откуда следует, что количество движения уже не было бы постоянным. Таким образом, законы о сохранении количества движения и кинетической энергии более уже не разделяются; в специальной теории относительности они образуют один закон — закон о постоянстве 4-вектора p_ν.

Таким образом, член mc^2, известный под названием *энергии покоя*, приобретает важное физическое значение. В нерелятивистской формулировке законов сохранения, данной в главе 1, сохранение количества движения могло иметь место без сохранения кинетической энергии. Однако релятивистская кинетическая энергия (6.41) должна при этом всё же сохраняться, что может быть только в том случае, когда изменяется энергия покоя, т. е. масса покоя. Связь между изменением массы покоя и вызванным им изменением энергии даётся следующей известной формулой Эйнштейна:

$$\Delta E = (\Delta m)\, c^2.$$

В литературе приводится много примеров сохранения релятивистской суммы $\frac{1}{2}mv^2 + mc^2$. Одной из известных иллюстраций такого рода является пример с неупругим ударом двух тел, движущихся с нерелятивистскими скоростями. Здесь количество движения сохраняется, а кинетическая энергия $\sum \frac{1}{2}mv^2$ не сохраняется, и обычно говорят, что энергия, потерянная при этом ударе, превращается в тепло. Однако релятивистская кинетическая энергия должна в этом случае сохраняться, что может иметь место лишь при увеличении массы покоя этой системы, пропорциональном количеству выделяющегося тепла. Практически это увеличение будет, конечно, очень мало, так как один джоуль энергии соответствует массе в $1{,}1 \times 10^{-14}$ *г*.

Современная физика даёт нам целый ряд примеров значительно большего изменения массы. Одним из них является случай, когда две частицы конечной массы образуются из энергии фотона, масса которого равна нулю. Наиболее ярким примером перехода массы в энергию *) является взрыв атомной бомбы. Количество движения при таком взрыве сохраняется, но кинетическая энергия движения значительно увеличивается. Полная энергия T остаётся при этом постоянной, так как при взрыве уменьшается масса покоя заряда бомбы. Следует, однако, заметить, что, несмотря на фантастическое количество выделяющейся при этом энергии, потеря массы этой бомбы не превышает $0{,}1\%$ от её первоначальной массы.

Между энергией T и количеством движения p имеется простая связь. Так как величина 4-вектора количества движения является постоянной, то

$$p_\mu p_\mu = -m^2c^2 = p^2 - \frac{T^2}{c^2},$$

откуда

$$T^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{6.44}$$

Формула (6.44) является релятивистским аналогом классической формулы $T = p^2/2m$ (если не считать того, что T здесь содержит и энергию покоя).

---

*) Утверждение, что масса переходит в энергию, не следует, конечно, понимать как исчезновение материи. При всех физических процессах выполняются и закон сохранения массы, и закон сохранения энергии. (*Прим. перев.*)

Массу m мы рассматривали как некоторую скалярную характеристику материальной точки, не изменяющуюся при преобразованиях Лоренца. Это — так называемая масса покоя. Однако иногда вводится и другая масса, которую мы будем называть *релятивистской* и обозначать через m_r. Под этой массой понимается величина

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.45}$$

Единственная цель, с которой вводится эта масса, состоит в том, чтобы сделать возможной запись количества движения в форме

$$\boldsymbol{p} = m_r \boldsymbol{v},$$

подобной форме, в которой записывается количество движения в нерелятивистской механике. В отличие от массы покоя релятивистская масса m_r зависит от скорости и при $\beta \to 1$ становится бесконечно большой.

В литературе можно встретить и другие «массы», вводимые обычно в связи с релятивистским уравнением движения

$$F_i = \frac{d}{dt}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.46}$$

Согласно этому уравнению сила не определяется ускорением точки, и даже направления этих векторов будут в общем случае различными. Однако в случае, когда векторы ускорения и скорости параллельны или перпендикулярны друг к другу, сила $\boldsymbol{F}$ будет параллельна ускорению (см. задачи в конце этой главы). Коэффициенты пропорциональности будут в этих специальных случаях иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} m_l &= \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \\ \text{и}\qquad m_t &= \frac{m}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

Они известны как продольная и поперечная массы. Следует, однако, заметить, что «массы» m_r, m_l и m_t употребляются в последнее время всё реже и реже, так как они делают менее ясным ковариантный характер законов механики и скорее затемняют, нежели раскрывают физическую сущность этого понятия.

§ 6.5. Релятивистские уравнения Лагранжа. Теперь, когда нами получено релятивистское обобщение уравнения Ньютона, мы можем перейти к вопросу о релятивистских уравнениях Лагранжа. В некотором отношении это сделать легко, так как нетрудно образовать лагранжиан, приводящий к правильным релятивистским уравнениям движения. Правда, на этот раз трудно получить уравнения

Лагранжа, исходя только из принципа Даламбера, как это было сделано в главе 1. Дело в том, что хотя равенство

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(a)} - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.42}$$

справедливо не только в классической механике, но и в релятивистской, однако все преобразования, проделанные в главе 1, будут теперь неверны, так как $\boldsymbol{p}_i$ не равно $m\boldsymbol{v}_i$.

Можно также исходить из принципа Гамильтона (§ 2.1), т. е. из равенства

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0. \tag{6.48}$$

Тогда задачу получения лагранжиана можно будет рассматривать как задачу об отыскании такой функции L, для которой уравнения Эйлера — Лагранжа совпадают с известными релятивистскими уравнениями движения.

Функцию, удовлетворяющую этим требованиям, обычно найти нетрудно. Пусть, например, имеется одна материальная точка, находящаяся в поле консервативной силы, не зависящей от скорости. В этом случае в качестве релятивистского лагранжиана L можно взять функцию

$$L = -mc^2 \sqrt{1-\beta^2} - V, \tag{6.49}$$

где V — потенциал, зависящий только от положения точки. В этом можно убедиться, составляя для L, написанного в форме (6.49), уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

Вычислив для этой цели $\frac{\partial L}{\partial v_i}$, получим

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{6.50}$$

и, следовательно, соответствующие данному лагранжиану уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i,$$

что совпадает с (6.46). Заметим, что лагранжиан (6.49) не равен $T - V$, хотя его производная по скорости и равна количеству движения. Именно это обстоятельство и делает соответствующие уравнения Лагранжа правильными, позволяя принять для L выражение (6.49). Поэтому мы могли бы строить наши рассуждения в обратном порядке, т. е., исходя из равенства (6.50), искать зависимость лагранжиана от скорости.

Лагранжиан (6.49) легко распространить на систему, состоящую из многих материальных точек. Кроме того, при этом можно перейти от декартовых координат x_i к обобщённым координатам q_j. Обобщённые импульсы будут тогда по-прежнему определяться равенством

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

и поэтому импульсы, соответствующие циклическим координатам, будут оставаться постоянными (так же, как и в нерелятивистской механике). Что касается теоремы о сохранении энергии, то она здесь также будет иметь место, но вывод её придётся несколько изменить. Вспомним, что в § 2.6 было показано, что если L не зависит явно от времени, то имеет место равенство

$$\sum \dot{q}_j p_j - L = H,$$

где H — некоторая постоянная. Этот вывод будет, конечно, справедлив и сейчас, так как, доказывая написанное равенство, мы исходили лишь из общего вида уравнения Лагранжа и из соотношения $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$. Однако дальнейшее наше заключение, что H есть полная энергия, теперь нельзя будет получить так же, как раньше, ибо L более уже не будет равно $T - V$, а $\sum \dot{q}_j p_j$ не будет равно $2T$. Заключение это, тем не менее, остаётся в силе, в чём можно убедиться, рассматривая пример с одной материальной точкой, где H равно

$$H = \sum_i \frac{mv_i^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2\sqrt{1-\beta^2} + V,$$

что после небольшого преобразования можно записать в виде

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + V = T + V = E.$$

Таким образом, мы видим, что H по-прежнему равно полной энергии E, являющейся здесь постоянной движения.

Введение потенциалов, зависящих от скорости, также не представляет здесь особых трудностей и может быть сделано в точности так же, как это было сделано в § 1.5. Так, например, лагранжиан частицы, находящейся в электромагнитном поле, будет теперь равен

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\varphi + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{6.51}$$

а соответствующий обобщённый импульс будет равен

$$p_i = mu_i + \frac{q}{c} A_i. \tag{6.52}$$

Как мы видим, он не равен mu_i, а отличается от него слагаемым, возникающим от той части потенциала, которая зависит от скорости. Этот результат не является, конечно, следствием релятивистских уравнений, так как тот же дополнительный член был нами получен и раньше [см. равенство (2.44)].

Таким образом, почти все специальные методы, созданные нами для решения задач классической механики, можно перенести на релятивистскую механику. С помощью этих методов мы могли бы решить ряд задач, подобных тем, что мы рассматривали раньше. Например, можно было бы получить релятивистское решение задачи о движении под действием центральной силы. Орбиты, которые при этом получаются, имеют в общих чертах тот же характер, что и ранее (см. гл. 3), однако в некоторых деталях они получаются, конечно, иными, так как теперь у нас иной лагранжиан.

§ 6.6. Ковариантная форма лагранжиана. Хотя описанная процедура получения лагранжиана и приводит к правильным релятивистским уравнениям движения, однако она является релятивистской лишь в определённом смысле, так как не является ковариантной.

Например, время t и пространственные координаты x_1, x_2, x_3 мы рассматривали как величины разного рода, тогда как их следовало рассматривать как совершенно равноправные координаты пространства Минковского. Поэтому переменной, к которой мы относим перемещение точки в пространстве, следует считать не t, а собственное время τ, являющееся инвариантным. Кроме того, лагранжиан должен быть инвариантной характеристикой материальной системы, не зависящей от того, какая система координат применяется при её изучении. Поэтому мы должны ожидать, что он будет некоторым скаляром, инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Наконец, если пользоваться языком четырёхмерного пространства, то, вместо того, чтобы быть функцией x_i, $\dot{x}_i (\equiv v_i)$ и t, лагранжиан должен быть функцией x_ν, $\frac{dx_\nu}{d\tau} (\equiv u_\nu)$ и τ. Ковариантная формулировка принципа Гамильтона должна поэтому иметь следующий вид:

$$\delta I = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L'(x_\nu, u_\nu, \tau)\, d\tau = 0, \tag{6.53}$$

где как I, так и ковариантный лагранжиан L' суть два инвариантных скаляра.

Добиться указанного ковариантного построения можно, однако, не в каждой задаче механики. Дело в том, что потенциал каждой системы определяется характером действующих на неё сил, выражения для которых можно получить лишь с помощью теоретических соображений, выходящих за пределы механики. Если на основе этих соображений удаётся получить ковариантное выражение для действующих сил, то можно получить ковариантное выражение и для лагранжиана L' в равенстве (6.53). Однако не всякие силы допускают ковариантную форму. Например, часто встречающаяся в задачах механики гравитационная сила безусловно не удовлетворяет этому требованию. Гравитационную силу принято рассматривать как «статическую силу дальнодействия», т. е. как силу, распространяющуюся с бесконечно большой скоростью. Но в теории относительности понятие такой силы теряет смысл, так как в этой теории мыслимы лишь силы, передающиеся со скоростями не больше c. С другой стороны, мы уже отмечали, что электромагнитные силы удовлетворяют этому требованию теории относительности. Поэтому мы ограничимся разысканием функции L' для двух случаев: для совершенно свободной частицы и для частицы, находящейся в электромагнитном поле.

Если исходить из ковариантного вариационного принципа для одной материальной точки, то уравнения Эйлера—Лагранжа, очевидно, будут иметь вид

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L'}{\partial u_\nu}-\frac{\partial L'}{\partial x_\nu}=0, \tag{6.54}$$

и левые части этих уравнений будут преобразовываться как составляющие 4-вектора. В случае свободной материальной точки лагранжиан её L' должен быть таким, чтобы уравнения (6.54) сводились к уравнениям

$$\frac{d}{d\tau}mu_\nu=0, \tag{6.55}$$

подобным по форме нерелятивистским уравнениям

$$\frac{d}{dt}mv_i=0.$$

Это обстоятельство наводит на мысль, что лагранжиан L' можно получить из нерелятивистского лагранжиана $L=\frac{1}{2}mv^2$ посредством замены v^2 на квадрат 4-скорости u_ν. Таким образом, будем иметь

$$L'=\frac{1}{2}mu_\nu u_\nu. \tag{6.56}$$

В справедливости сделанного выбора можно убедиться с помощью непосредственной проверки. Действительно, так как

$$\frac{\partial L'}{\partial x_\nu}=0, \quad \frac{\partial L'}{\partial u_\nu}=mu_\nu=p_\nu,$$

то уравнения (6.54) совпадают с уравнениями (6.55) *).

Пусть теперь точка находится в электромагнитном поле. Тогда лагранжианом L' будет

$$L'=\frac{1}{2}mu_\nu u_\nu+\frac{q}{c}u_\lambda A_\lambda. \tag{6.57}$$

Обобщённые импульсы будут здесь равны

$$p_\nu=\frac{\partial L'}{\partial u_\nu}=mu_\nu+\frac{q}{c}A_\nu, \tag{6.58}$$

и поэтому уравнения (6.54) будут иметь вид

$$\frac{d}{d\tau}\left(mu_\nu+\frac{q}{c}A_\nu\right)-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{q}{c}u_\lambda A_\lambda\right)=0,$$

или

$$\frac{d}{d\tau}mu_\nu=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{q}{c}u_\lambda A_\lambda\right)-\frac{q}{c}\frac{dA_\nu}{d\tau}.$$

Но эти уравнения совпадают с обобщёнными уравнениями Ньютона [см. уравнение (6.30)] в случае, когда сила Минковского равна

$$K_\nu=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{q}{c}u_\lambda A_\lambda\right)-\frac{q}{c}\frac{dA_\nu}{d\tau},$$

что совпадает с выведенной ранее формулой (6.33).

Обобщённый 4-импульс (6.58) опять не равен обычному количеству движения и отличается от него дополнительным членом, содержащим электромагнитный потенциал. Следует заметить, что p_4 не равно здесь просто iT/c, как в случае отсутствия сил [см. уравне-

*) Следует заметить, что правая часть равенства (6.56) является постоянной величиной, равной $-\frac{m}{2}c^2$. Однако это не является для нас существенным, так как для нас важно только то, что *функциональная* зависимость L' от u_ν обеспечивает получение нужных нам уравнений. Но это означает, что выражение (6.56) не является единственно возможным. Действительно, L' может иметь вид $mf(u_\nu u_\nu)$, где $f(x)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию

$$f'(-c^2)=+\frac{1}{2}$$

$\left(f'\right.$ означает частную производную $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. В формуле (6.56) мы полагали $f(u_\nu u_\nu)=$ $=\frac{1}{2}u_\nu u_\nu$, однако можно было бы выбрать и зависимость

$$f(u_\nu u_\nu)=-c\sqrt{-u_\nu u_\nu},$$

получающуюся непосредственно из (6.48), если переменную интегрирования t заменить на τ.

ние (6.43)], а имеет вид

$$p_4 = \frac{iT}{c} + \frac{iq\varphi}{c} = \frac{i}{c} E,$$

где E — полная энергия, равная $T + q\varphi$. Таким образом, обобщённый импульс, соответствующий *временной* координате, пропорционален здесь *полной энергии*. (С подобной связью мы встретимся позже в нерелятивистской механике.) Соотношение между пространственными составляющими количества движения и кинетической энергией T может быть здесь получено тем же путём, каким было получено равенство (6.44). Пространственная часть равенства (6.58) может быть записана в виде

$$mu_i = p_i - \frac{qA_i}{c},$$

откуда

$$m^2 u_\nu u_\nu = -m^2c^2 = \left(\boldsymbol{p} - \frac{q\boldsymbol{A}}{c}\right)^2 - \frac{T^2}{c^2}$$

и, следовательно,

$$T^2 = \left(\boldsymbol{p} - q\,\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right)^2 c^2 + m^2c^4. \tag{6.59}$$

На основании изложенного в этой главе может возникнуть мысль, что каждому построению классической механики однозначно соответствует определённый релятивистский аналог. Однако это не так. Например, мы уже отмечали те трудности, которые возникают в релятивистской механике в связи с гравитационными силами, а также другими силами «дальнодействия». Кроме того, релятивистское преобразование Лоренца относится лишь к равномерно движущимся системам и потому не может быть применено к системам, движущимся ускоренно, таким, например, как вращающиеся системы координат. Переход к этим системам может быть сделан в специальной теории относительности лишь с трудом. Точно так же в релятивистскую механику трудно ввести представление о связях, ибо связи должны в этом случае выражаться посредством инвариантов Лоренца. Но в случае, например, связей твёрдого тела это требование безусловно не выполняется, так как условия этих связей содержат только пространственные составляющие 4-векторов, определяющих частицы твёрдого тела. Следовательно, вся динамика твёрдого тела не имеет соответствующей релятивистской аналогии.

Задачи

1. Докажите закон Эйнштейна для сложения двух параллельных скоростей [формула (6.20)]. (Доказательство это проще всего получить, рассматривая два последовательных преобразования Лоренца как последовательные повороты в плоскости x_3x_4).

2. Получите преобразование Лоренца, в котором скорость образует с осью z бесконечно малый угол $d\theta$, применив для этого к (6.15) преобразование подобия. Покажите с помощью непосредственной проверки, что полученная матрица является ортогональной и что обратная ей матрица получается посредством замены v на $-v$.

3. Релятивистский закон сложения скоростей можно получить и другим путём, если учесть, что вторая скорость получается из пространственных составляющих 4-скорости, которые можно преобразовать к начальной системе посредством формул преобразования Лоренца.

Пусть вторая система движется относительно первой со скоростью v', направленной вдоль оси z, а третья система движется относительно второй со скоростью $\boldsymbol{v}''$, направленной произвольным образом.

Показать, пользуясь указанным методом, что скорость, с которой третья система движется относительно первой, определяется равенствами:

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{1-\beta'^2}\sqrt{1-\beta''^2}}{1+\beta'\beta''_z},$$

$$\beta_x = \frac{\beta''_x\sqrt{1-\beta'^2}}{1+\beta'\beta''_z}, \qquad \beta_y = \frac{\beta''_y\sqrt{1-\beta'^2}}{1+\beta'\beta''_z}, \qquad \beta_z = \frac{\beta'+\beta''_z}{1+\beta'\beta''_z},$$

где $\beta''_x = v''_x/c$ и т. д. [Если вектор $\boldsymbol{v}''$ направлен вдоль оси z, то последняя из этих формул совпадает с формулой (6.20).]

4. Рассмотрите движение, описанное в задаче 3, в случае, когда вектор $\boldsymbol{v}''$ лежит в плоскости zx и весьма мал по сравнению с вектором $\boldsymbol{v}'$. Докажите, что оси z и z'' будут казаться непараллельными (несмотря на то, что они направляются параллельно оси z'), показав, что относительная скорость двух систем будет казаться образующей разные углы с осями z и z''. Покажите также, что угол между этими осями будет равен

$$d\theta = \frac{-\beta''_x\beta'}{2}.$$

Если скорость $\boldsymbol{v}''$ представляет изменение скорости $\boldsymbol{v}'$ в течение бесконечно малого времени вследствие ускорения $\boldsymbol{a}$, то этот вывод можно интерпретировать как вращение осей с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_t = \frac{\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{a}}{c^2}.$$

Это явление имеет важное значение в атомной физике и известно под названием *прецессии Томаса*.

5. Рассмотрите уравнение (6.46) и покажите, что сила параллельна ускорению только в том случае, когда скорость и ускорение параллельны либо перпендикулярны друг к другу. Проверьте для этих случаев формулы (6.47).

6. Исходя из преобразования 4-ускорения, покажите, что связь между ускорением $\boldsymbol{a}$ и ускорением $\boldsymbol{a}'$ относительно системы, в которой скорость точки в данный момент равна нулю, выражается формулами:

$$a_x = \frac{a'_x}{1-\beta^2}, \quad a_y = \frac{a'_y}{1-\beta^2}, \quad a_z = \frac{a'_z}{(1-\beta^2)^{3/2}},$$

причём ось z выбрана в направлении относительной скорости.

7. В β-распаде, рассмотренном в задаче 1 главы 1, масса электрона соответствует энергии покоя 0,511 Mev, а масса нейтрино равна нулю. Каковы здесь полные энергии, уносимые электроном и нейтрино? Какая часть массы ядра переходит в кинетическую энергию (включая энергию покоя электрона)?

8. Мезон массы π, находящийся в состоянии покоя, распадается на мезон массы μ и нейтрино нулевой массы. Показать, что кинетическая энергия движения μ-мезона (т. е. без учёта энергии покоя) равна

$$T = \frac{(\pi - \mu)^2}{2\pi} c^2.$$

9. Согласно классическому определению фотон представляет частицу, не имеющую массы, но обладающую количеством движения $h/\lambda = h\nu/c$ и, следовательно, обладающую кинетической энергией $h\nu$. При соударении с покоящимся электроном массы m фотон отклоняется на некоторый угол θ и движется с новой энергией $h\nu'$. Показать, что связь между изменением энергии и углом θ определяется формулой

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где $\lambda_c = h/mc$ — так называемая длина волны Комптона. Показать также, что кинетическая энергия, приобретаемая электроном после удара, равна

$$T = h\nu \frac{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

10. При релятивистском исследовании движения ракет уже нельзя пользоваться методом, о котором говорилось в задаче 3 главы 1, что частично объясняется тем, что масса в этом случае не сохраняется. Вместо этого следует пользоваться законом о сохранении 4-импульса; изменение каждой составляющей 4-импульса ракеты за время dt должно быть при этом связано с величиной некоторой составляющей p_i для газов, выбрасываемых за это время из ракеты. Покажите, что если на ракету не действуют внешние силы, то дифференциальное уравнение, определяющее зависимость её скорости от массы, будет иметь вид

$$m \frac{dv}{dm} + a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0,$$

где a — постоянная скорость, с которой выбрасываемые продукты горения движутся *относительно ракеты*. Докажите, что решение этого уравнения можно представить в виде

$$\beta = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2a}{c}}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2a}{c}}},$$

где m_0 — начальная масса ракеты. Что происходит с той массой, которая в рассматриваемом случае теряется?

11. Исходя из уравнения (6.40), покажите, что скорость заряженной частицы, движущейся в постоянном магнитном поле, остаётся неизменной. Покажите также, что траекторией заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле, является винтовая линия. Докажите, что радиус кризизны её ρ будет для данной частицы обратно пропорционален напряжённости поля B и прямо пропорционален составляющей механического количества движения в направлении, перпендикулярном к $\boldsymbol{B}$. (Поэтому произведение $B\rho$ может служить мерой количества движения данной частицы.)

12. Частица, заряд которой равен q, а масса покоя равна m, вносится с начальной скоростью v_0 в однородное электрическое поле E, перпендикулярное к v_0. Найти траекторию этой частицы и показать, что при $c \to \infty$ она стремится к параболе.

13. Частица находится под действием притягивающей силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Показать, что если учитывать релятивистские эффекты, то движение этой частицы можно считать происходящим по эллипсу, поворачивающемуся в своей плоскости. Вычислить скорость этого вращения для орбиты Меркурия. (Она получается равной около 7″ за столетие, что намного меньше, чем действительно наблюдаемая скорость, равная 40″ за столетие; её можно получить только с помощью общей теории относительности.)

14. Отправляясь от уравнения (6.46), вывести следующий релятивистский аналог теоремы о вириале: для движений, ограниченных в пространстве и совершающихся со скоростями, не приближающимися сколь угодно близко к c, имеет место равенство

$$\overline{L_0} + \overline{T} = -\overline{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}},$$

где L_0 — лагранжиан в случае отсутствия внешних сил. Заметим, что ни L_0, ни T не соответствуют кинетической энергии в нерелятивистской механике, но сумма их $L_0 + T$ играет ту же роль, что и удвоенная кинетическая энергия в нерелятивистской теореме о вириале [см. уравнение (3.26)].

Рекомендуемая литература

P. Bergmann, An Introduction to the Theory of Relativity.

Несомненно, это одна из лучших английских книг по методам теории относительности. К сожалению, тензорный аппарат этой книги построен с учётом нужд общей теории относительности (занимающей вторую половину книги), что часто приводит к преждевременно сложным для специальной теории относительности обозначениям.

R. B. Lindsay and H. Margenau, Foundations of Physics.

Глава 7 этой книги посвящена главным образом специальной теории относительности. В ней, в частности, рассматриваются некоторые вопросы, подготавливающие создание этой теории, а также физические интерпретации некоторых её следствий. Четырёхмерная концепция развита здесь не очень полно.

Albert Einstein, The Meaning of Relativity*).

Книга не является популярной. Специальной теории относительности здесь посвящено немного более одной трети всего объема, тем не менее по этой теме здесь содержится очень много различных сведений. Для чтения этой книги нужна хорошая подготовка по основам электродинамики.

R. Becker, Theorie der Elektrizität, т. II.

Многие немецкие работы по электродинамике содержат подробное изложение специальной теории относительности. Наилучшая из них, по-видимому, содержится в этом томе Абрагама и Беккера. Книга написана хорошим стилем и легко читается. Хотя главное внимание в этой книге уделяется вопросам электромагнетизма, однако релятивистская механика изложена здесь тоже довольно полно. Специальной теории относительности в этой книге посвящается более ста страниц, на которых полностью изложена физическая и математическая сторона предмета.

---

*) Имеется русский перевод: А. Эйнштейн, Сущность теории относительности, ИЛ, 1956.

ГЛАВА 7

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

В первых двух главах этой книги мы всесторонне рассмотрели уравнения Лагранжа, а позднее — ряд приложений этих уравнений. В этой главе мы продолжим развитие формальных методов механики и получим уравнения движения, известные под названием уравнений Гамильтона. Правда, к физической стороне вопроса ничего не прибавится, однако мы получим новый (более сильный) метод исследования механических систем. В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемые системы являются голономными, а действующие на них силы обладают потенциалами, зависящими от положения или от скорости (см. § 1.5).

§ 7.1. Преобразования Лежандра и уравнения Гамильтона. Система с n степенями свободы описывается посредством следующих n уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0. \tag{7.1}$$

Так как они являются уравнениями второго порядка, то для однозначного определения движения системы необходимо задать начальные значения всех n координат q_i и всех n производных $\dot{q}_i$. В этом смысле координаты q_i и скорости $\dot{q}_i$ образуют полную систему $2n$ независимых переменных, необходимых для описания движения системы. Поэтому метод Лагранжа (в нерелятивистской механике) может рассматриваться как метод описания системы посредством *обобщённых координат и скоростей*. В методе, к которому мы сейчас переходим, независимыми переменными будут *обобщённые координаты* q_i и *обобщённые импульсы* p_i, определяемые равенствами

$$p_i=\frac{\partial L\,(q_j,\dot{q}_j,t)}{\partial \dot{q}_i} \tag{7.2}$$

[см. равенства (2.41)]. Наилучший способ перехода от переменных $(q, \dot{q}, t)$ к переменным (q, p, t) состоит в применении математической процедуры, известной под названием *преобразования Лежандра* (которое применяется как раз для таких случаев изменения переменных).

Рассмотрим какую-либо функцию $f(x, y)$. Дифференциал её имеет вид

$$df = u\,dx + v\,dy, \tag{7.3}$$

где

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{7.4}$$

Перейдём теперь от независимых переменных x, y к независимым переменным u, y и, следовательно, от дифференциалов dx, dy к дифференциалам du, dy. Пусть функция g от u и y определяется равенством

$$g = f - ux. \tag{7.5}$$

Тогда дифференциал её будет равен

$$dg = df - u\,dx - x\,du$$

или согласно (7.3)

$$dg = v\,dy - x\,du,$$

где величины x и v являются теперь функциями переменных u и y. Они определяются равенствами

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}, \tag{7.6}$$

которые подобны по форме равенствам (7.4).

Преобразование Лежандра, построенное указанным способом, часто применяется в термодинамике. Например, энтальпия X есть функция энтропии S и давления P, причём

$$\frac{\partial X}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial X}{\partial P} = V,$$

и поэтому

$$dX = T\,dS + V\,dP,$$

где T — температура, а V — объём. Понятие энтальпии оказывается удобным при рассмотрении изэнтропических и изобарических процессов. В этом случае целесообразно пользоваться термодинамической функцией независимых переменных T и P. Если с этой целью воспользоваться преобразованием Лежандра, то такая функция будет иметь вид

$$G = X - TS,$$

а дифференциал её будет равен

$$dG = -S\,dT + V\,dP. \tag{7.7}$$

Функция G известна под названием функции Гиббса.

Переход от переменных $(q, \dot{q}, t)$ к переменным (q, p, t) отличается от преобразования (7.3) — (7.5) лишь тем, что на этот раз преобразуется не одна переменная, а несколько. Вместо лагранжиана L мы теперь будем иметь дело с функцией

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \tag{7.8}$$

построенной по аналогии с функцией (7.5), умноженной на -1. Функцию H называют *гамильтонианом.* Это — та же самая функция H, которая фигурировала в правой части равенства (2.50). Считая её функцией переменных p, q и t, будем иметь

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{7.9}$$

Но согласно (7.8) можно написать

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{7.10}$$

причём члены этого равенства, содержащие $d\dot{q}_i$, взаимно сократятся, так как согласно определению обобщённых импульсов имеем

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = 0.$$

Кроме того, согласно уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i,$$

и поэтому уравнение (7.10) принимает вид

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{7.11}$$

Сравнивая теперь (7.9) с (7.11), мы получаем следующие $2n+1$ равенств, аналогичных равенствам (7.6):

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ -\dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{7.13}$$

Уравнения (7.12) называются *каноническими уравнениями Гамильтона*; они представляют систему $2n$ уравнений первого порядка, эквивалентную уравнениям Лагранжа. Для того чтобы составить эти уравнения для заданной механической системы, нужно образовать лагранжиан $L = L(q, \dot{q}, t)$ и, вычислив с помощью (7.2) обобщённые импульсы, составить гамильтониан (7.8) как функцию p_i, q_i, t. Подставив затем найденное H в (7.12), мы получим уравнения движения данной системы.

§ 7.2. Циклические координаты и метод Рауса. Уравнения Гамильтона особенно удобны при исследовании систем, содержащих циклические координаты. Согласно определению, данному в § 2.6, циклической координатой q_j называется координата, которая не входит в лагранжиан, и отсюда, как мы знаем, следует (на основании уравнений Лагранжа), что обобщённый импульс p_j, соответствующий этой координате, является постоянным. Но если $\dot{p}_j$ будет равно нулю, то согласно уравнениям (7.12) производная $\frac{\partial H}{\partial q_j}$ также будет равна нулю. Следовательно, циклическая координата будет отсутствовать не только в лагранжиане, но и в гамильтониане *). Пусть теперь, наоборот, будет известно, что некоторая координата q_j не входит в H. Тогда из (7.12) можно будет сделать вывод, что соответствующий обобщённый импульс p_j будет оставаться постоянным. Таким образом, между гамильтонианом H и лагранжианом L здесь имеется полное сходство. Однако между ними имеется и существенная разница. Если какая-нибудь координата, например q_n, является циклической, то лагранжиан имеет вид

$$L = L(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t),$$

т. е. содержит все обобщённые скорости. Поэтому, несмотря на наличие циклической координаты, нам всё же приходится решать задачу с n степенями свободы. В противоположность этому при описании системы с помощью гамильтониана циклическая координата q_n действительно может быть названа «игнорируемой», так как при этом импульс p_n будет равен некоторой постоянной α, и поэтому H будет иметь вид

$$H = H(q_1, \ldots, q_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, \alpha, t).$$

Таким образом, гамильтониан будет в этом случае содержать только $n-1$ координат, и их можно будет определить, полностью игнорируя циклическую координату. (Эта координата проявляет себя лишь в виде постоянной интегрирования α, которая определяется начальными условиями.) После того как это будет сделано, можно

*) Этот вывод следует также и из уравнения (7.8), согласно которому H отличается от $-L$ только на сумму $\sum_i p_i \dot{q}_i$, не содержащую q_i явным образом.

будет найти и циклическую координату q_n как функцию времени, для чего достаточно будет проинтегрировать уравнение

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha}.$$

Возможен ещё один метод исключения циклических координат из уравнений Лагранжа — это так называемый метод Рауса. В сущности это такой же метод перехода от переменных q, $\dot{q}$ к переменным q, p, но выполняемый лишь для тех координат, которые являются циклическими. При этом получаются уравнения движения, которые для циклических координат подобны уравнениям Гамильтона, а для остальных — уравнениям Лагранжа.

Обозначим циклические координаты через $q_1, \ldots, q_s$ и введём функцию R, определяемую равенством

$$R(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_s, \dot{q}_{s+1}, \ldots, \dot{q}_n, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L. \tag{7.14}$$

Эта функция называется функцией Рауса *). Дифференциал её равен

$$dR = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \, dp_i - \sum_{i=s+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

и отсюда можно сделать вывод, что имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{7.15}$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = s+1, \ldots, n). \tag{7.16}$$

Уравнения (7.15) относятся к координатам $q_1, \ldots, q_s$ и имеют вид уравнений Гамильтона, в которых функция R играет роль гамильтониана. В то же время уравнения (7.16) показывают, что координаты $q_{s+1}, \ldots, q_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = s+1, \ldots, n), \tag{7.17}$$

имеющим вид уравнений Лагранжа, в которых R играет роль лагранжиана. Воспользуемся теперь циклическим характером координат $q_1, \ldots, q_s$. Так как ни одна из этих координат не входит в функцию L, то они, очевидно, не войдут и в функцию R. Кроме

---

*) Функция (7.14) отличается от обычно определяемой функции Рауса. Это сделано для того, чтобы функция Рауса была подобна функции (7.8), определяющей H.

того, обобщённые импульсы $p_1, \ldots, p_s$ будут постоянны (как соответствующие циклическим координатам). Поэтому их можно заменить постоянными $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, определяемыми из начальных условий, и тогда функция Рауса будет иметь вид

$$R(q_{s+1}, \ldots, q_n, \dot{q}_{s+1}, \ldots, \dot{q}_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, t),$$

т. е. не будет содержать циклических координат и их производных. На этом основании уравнения (7.17), определяющие нециклические координаты, можно решать, не рассматривая вопроса о поведении циклических координат. Следовательно, мы здесь имеем такое же положение, как в уравнениях Гамильтона. Таким образом, метод Рауса можно рассматривать как основанный и на методе Лагранжа и на методе Гамильтона (хотя частичное применение метода Гамильтона является менее естественным, чем полное его использование).

§ 7.3. Теоремы о сохранении и физический смысл гамильтониана. Мы видели, что циклическая координата отсутствует не только в L, но и в H. Поэтому теоремы о сохранении обобщённых импульсов, полученные нами в § 2.6, можно было бы вывести не из уравнений Лагранжа, а из уравнений Гамильтона. Это относится и к тем соображениям о симметрии системы, которые были высказаны нами в главе 2. Пусть, например, некоторая система будет симметрична относительно фиксированной оси. Тогда можно будет сказать, что функция H инвариантна относительно вращения вокруг этой оси и поэтому не может содержать угла поворота. Следовательно, этот угол является циклической координатой, и поэтому соответствующий ему кинетический момент будет оставаться постоянным.

О физическом смысле H мы уже говорили в § 2.6. Там было показано, что если L [а согласно уравнению (7.13) также и H] не является явной функцией t, то H есть некоторая постоянная движения. Этот результат можно получить и непосредственно из уравнений (7.12), вычисляя с их помощью производную

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (7.18)$$

Подставив сюда $\dot{q}_i$ и $\dot{p}_i$ из уравнений (7.12), получим:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Отсюда

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \qquad (7.19)$$

Кроме того, в § 2.6 было показано, что если потенциал не зависит от скорости, а уравнения

$$r_m = r_m(q_1, \ldots, q_n, t),$$

описывающие переход к обобщённым координатам, не содержат явно t, то H есть полная энергия $T+V$. (Эта теорема верна и в релятивистской механике; см. § 6.5.) Следует, однако, иметь в виду, что условия, когда H является некоторой постоянной и когда H является полной энергией, не тождественны, ибо может случиться, что уравнения (1.36) будут содержать явно время, а H не будет его содержать. В этом случае H будет некоторой константой движения, но *не будет* полной энергией.

Во многих задачах механики выражения для обобщённых импульсов легко получить непосредственно из физических соображений. Если, кроме того, гамильтониан будет при этом полной энергией, то можно будет избежать многих формальных процедур, нужных для составления уравнений движения. Рассмотрим простой пример. Пусть требуется составить уравнения движения точки, находящейся в поле центральных сил. Функция H будет тогда полной энергией

$$H = T + V(r),$$

а T будет равно

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Чтобы получить теперь уравнения Гамильтона, нужно выразить H через обобщённые импульсы, соответствующие координатам r и θ. Обобщённые импульсы будут, очевидно, иметь следующие выражения:

$$p_r = mv_r = m\dot{r},$$
$$p_\theta = mrv_\theta = mr^2\dot{\theta}.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

и, следовательно,

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r).$$

Таким образом, мы получили гамильтониан, не составляя сначала лагранжиана. В данном случае мы будем иметь четыре уравнения Гамильтона. Два первых из них будут иметь вид:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

и не дадут нам ничего нового; два других запишутся в виде:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p}_\theta = 0,$$

т. е. будут совпадать с уравнениями (3.7) и (3.10).

В качестве другого примера того же рода рассмотрим релятивистский гамильтониан частицы, потенциал которой не зависит от скорости (см. § 6.5). В данном случае гамильтониан также будет равен полной энергии, и поэтому можно будет написать:

$$H = T + V,$$

где кинетическая энергия T должна быть выражена через количество движения p, что легко сделать с помощью равенства (6.44), согласно которому

$$T^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

Таким образом, будем иметь

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V. \tag{7.20}$$

Введение в метод Гамильтона потенциалов, зависящих от скорости, не представляет никаких формальных трудностей, однако при этом априори не ясно, является ли H полной энергией. Мы рассмотрим здесь лишь тот частный случай, когда действующие силы являются электромагнитными. Лагранжиан (нерелятивистский) точки, движущейся в электромагнитном поле, имеет вид

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}.$$

Отсюда следует, что обобщённые импульсы этой точки равны

$$p_i = mv_i + \frac{q}{c}A_i. \tag{7.21}$$

Далее, по определению H [см. уравнение (7.8)] имеем:

$$H = \sum_i p_i v_i - L = mv^2 + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - L,$$

или

$$H = \frac{mv^2}{2} + q\varphi = T + q\varphi.$$

Таким образом, гамильтониан равен в данном случае полной энергии частицы. Выраженный через обобщённые импульсы (7.21), он будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + q\varphi. \tag{7.22}$$

Аналогичный результат получается и для *релятивистского* гамильтониана частицы, движущейся в электромагнитном поле. Обобщённые импульсы (6.52) будут здесь, так же как и в классическом случае, содержать дополнительные слагаемые $\frac{qA_i}{c}$, которые в конечном счёте исчезнут вследствие сокращения членов с векторным потенциалом. Поэтому гамильтониан здесь опять будет равен полной энергии

$$H = T + q\varphi.$$

Для окончательного вычисления гамильтониана заметим, что четвёртая составляющая 4-импульса [см. уравнение (6.58)] равна здесь $\frac{iH}{c}$, а релятивистская кинетическая энергия может быть выражена равенством (6.59). Поэтому H будет в данном случае иметь вид

$$H = \sqrt{\left(\boldsymbol{p} - \frac{q\boldsymbol{A}}{c}\right)^2 c^2 + m^2c^4} + q\varphi. \tag{7.23}$$

Интересно сравнить гамильтонианы (7.22) и (7.23) с соответствующими гамильтонианами в случае потенциалов, не зависящих от скорости. Если потенциал V не зависит от скорости, то H равно

$$H = \frac{p^2}{2m} + V,$$

где m — масса частицы. Отсюда видно, что для того, чтобы эта формула совпадала с формулой (7.22), достаточно заменить V на $q\varphi$, а импульс $\boldsymbol{p}$ на $\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$. Точно таким же путём можно образовать релятивистский гамильтониан (7.23) из гамильтониана (7.20); этот способ часто применяется в квантовой механике.

Гамильтонианы (7.20) и (7.23) являются релятивистскими лишь в том смысле, что они приводят к правильным релятивистским уравнениям движения. Однако они не являются ковариантными. Ковариантный гамильтониан H' можно получить, применяя преобразования Лежандра к ковариантному лагранжиану L', рассмотренному в предыдущей главе. При этом вместо времени t следует пользоваться инвариантным временем τ и вместо обобщённого 3-импульса рассматривать обобщённый 4-импульс. В релятивистских обозначениях ковариантный гамильтониан частицы запишется в виде

$$H' = p_\lambda u_\lambda - L', \tag{7.24}$$

а соответствующие восемь уравнений движения будут иметь вид:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_\lambda} = \frac{dx_\lambda}{d\tau}, \quad \frac{\partial H'}{\partial x_\lambda} = -\frac{dp_\lambda}{d\tau}. \tag{7.25}$$

В частном случае, когда действующие на частицу силы являются электромагнитными, лагранжиан L' равен

$$L' = \frac{1}{2} m u_\lambda u_\lambda + \frac{q}{c} A_\lambda u_\lambda$$

[см. уравнение (6.57)], а соответствующие импульсы равны

$$p_\lambda = m u_\lambda + \frac{q}{c} A_\lambda$$

[см. уравнение (6.58)]. Тогда согласно (7.24) будем иметь

$$H' = m u_\lambda u_\lambda + \frac{q}{c} A_\lambda u_\lambda - \frac{1}{2} m u_\lambda u_\lambda - \frac{q}{c} A_\lambda u_\lambda = \frac{1}{2} m u_\lambda u_\lambda,$$

или, вводя сюда p_λ, получаем

$$H' = \frac{1}{2m} \sum_\lambda \left(p_\lambda - \frac{q}{c} A_\lambda\right)^2. \tag{7.26}$$

Если пользоваться полученным ковариантным гамильтонианом, то пространственная часть уравнений (7.25) приведет нас, очевидно, к пространственным уравнениям движения. Однако, кроме того, появятся ещё два уравнения, получающиеся при $\lambda = 4$. Одно из них устанавливает тот факт, что p_4 пропорционально полной энергии. Действительно, полагая в первом уравнении (7.25) $\lambda = 4$, будем иметь:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_4} = \frac{p_4 - \frac{q}{c} A_4}{m} = u_4,$$

или

$$p_4 = \frac{i}{c}(T + q\varphi) = \frac{iE}{c}.$$

Этот результат уже отмечался нами ранее. Другое из этих уравнений можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dp_4}{dt} = -\frac{1}{ic} \frac{\partial H'}{\partial t},$$

или

$$\frac{dH}{dt} = \sqrt{1-\beta^2} \frac{\partial H'}{\partial t}.$$

Но из сравнения формул (7.26) и (7.23) следует, что

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = \frac{T}{mc^2} \frac{\partial H}{\partial t},$$

и поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

что мы уже имели раньше в равенстве (7.19).

Ковариантный гамильтониан, так же как ковариантный лагранжиан, можно образовать только в том случае, когда потенциалы всех действующих сил выражаются ковариантным образом. Мы знаем, однако, что это возможно не всегда и что в настоящее время электромагнитные силы представляют единственный простой пример, когда ковариантная формулировка оказывается возможной.

Таким образом, мы видим, что принципиально релятивистская механика также может быть построена на основе метода Гамильтона. Однако для упрощения изложения мы бóльшую часть последующих рассуждений будем проводить в рамках нерелятивистской механики.

§ 7.4. Вывод уравнений Гамильтона из вариационного принципа. Мы знаем, что уравнения Лагранжа являются следствием вариационного принципа Гамильтона (см. § 2.1). Более того, вывод уравнений Лагранжа из этого принципа имеет определённое преимущество, так как он применим и к системам, выходящим за рамки обычной механики. Поэтому целесообразно найти такой вариационный принцип, который приводит непосредственно к уравнениям Гамильтона. Мы увидим, что это можно сделать с помощью обычного принципа Гамильтона

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0, \tag{7.27}$$

если воспользоваться равенством (7.8) и выразить в нём L через гамильтониан H. Проделав это, мы вместо равенства (7.27) получим

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_i p_i\dot{q}_i - H(q,\ p,\ t)\Big)\,dt = 0, \tag{7.28}$$

или

$$\delta \sum_i \int_{q_1}^{q_2} p_i\,dq_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} H\,dt = 0. \tag{7.28'}$$

Равенство (7.28) иногда называют *модифицированным принципом Гамильтона*. Мы будем пользоваться им главным образом в связи с каноническими преобразованиями (см. гл. 8), сейчас же мы покажем, что этот принцип приводит к уравнениям движения в форме Гамильтона.

Фигурирующая в равенстве (7.28) δ-вариация была рассмотрена нами в § 2.1. Термин «вариация интеграла» мы там понимали в смысле изменения интеграла при изменении траектории изображающей точки в пространстве конфигураций. При этом начальная и конечная точки такой траектории оставались неизменными (см. рис. 9). Кроме того, на вариацию интеграла накладывалось ещё одно условие, состоящее в том, что при варьировании траектории изображающей точки время t не варьировалось. В частности, моменты времени, соответствующие начальной и конечной точкам траектории, оставались при всех вариациях неизменными, и поэтому полное время движения являлось для всех траекторий одним и тем же. Таковы условия, накладываемые на вариацию интеграла, стоящего в правой части равенства (7.28).

Мы знаем, что процесс варьирования интеграла можно свести к вычислению дифференциалов, для чего достаточно рассмотреть однопараметрическое семейство возможных траекторий в пространстве конфигураций. Координаты q_i становятся тогда функциями времени t и параметра α, указывающего, какая траектория применяется при вычислении интеграла I. Поэтому этот интеграл можно рассматривать как функцию α, а вариации входящих в него величин можно отождествить с их дифференциалами. Символически это можно записать следующим образом:

$$\delta \to d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}. \tag{7.29}$$

Именно такой метод мы применяли при выводе уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона. Этот метод мы применим и сейчас, но только вариации величин q и p будем считать теперь независимыми, так как в методе Гамильтона координаты q и импульсы p рассматриваются как равноправные координаты, описывающие состояние системы.

Записывая равенство (7.28) с помощью параметра α, мы будем иметь

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0,$$

или

$$d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) dt = 0 \tag{7.30}$$

(так как t_1 и t_2 не зависят от α). Кроме того, так как варьирование производится при постоянном t, то в члене $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}$ можно изменить порядок дифференцирования по t и по α и заменить этот член на $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)$. Тогда получим

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt,$$

причём первое слагаемое правой части этого равенства будет равно нулю, так как все варьируемые траектории проходят через одни и те же конечные точки, и поэтому при $t=t_1$ и $t=t_2$ производная $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$ обращается в нуль. Учитывая это и полагая

$$d\alpha\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}=\delta q_i \quad \text{и} \quad d\alpha\frac{\partial p_i}{\partial \alpha}=\delta p_i$$

[см. (7.29)], мы можем равенство (7.30) записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left[\delta p_i\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)-\delta q_i\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\right]dt=0.$$

Но так как вариации δq_i и δp_i являются независимыми, то этот интеграл может обращаться в нуль только тогда, когда равны нулю коэффициенты при вариациях δq_i и δp_i. Таким образом, мы получаем равенства

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

совпадающие с уравнениями Гамильтона.

Требование независимости вариаций δq_i и δp_i играло в этом доказательстве весьма существенную роль. Это обстоятельство подчёркивает основное различие между методами Лагранжа и Гамильтона. В методе Лагранжа поведение системы описывается её обобщёнными координатами q_i и обобщёнными скоростями $\dot{q}_i$. Но переменная $\dot{q}_i$ тесно связана там с переменной q_i, так как она равна производной от q_i по t. Поэтому при выводе уравнений Лагранжа мы должны были выражать вариации $\delta\dot{q}_i$ через независимые вариации δq_i. Это делалось с помощью интегрирования по частям, в результате чего появлялись члены $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$, приводившие к уравнениям движения второго порядка. Из модифицированного же принципа Гамильтона мы получили уравнения первого порядка, и это удалось сделать только потому, что в отличие от $\delta\dot{q}_i$ мы считали δp_i не зависящими от δq_i. Это значит, что обобщённые импульсы мы считаем такими же независимыми переменными, как обобщённые координаты, и считаем, что p_i связаны с q_i и t *только уравнениями движения*, а не каким-либо заранее заданным соотношением. Таким образом, ни систему переменных q_i, ни систему переменных p_i мы не рассматриваем как основную, а считаем эти переменные одинаково независимыми. Только увеличивая таким способом число независимых переменных с n до $2n$, мы можем получить уравнения движения первого порядка. В связи с этим следует заметить, что термины «координаты» и «импульсы» являются неудачными, так как они вызывают представление о пространственных координатах и таких величинах, как количество движения или кинетический момент.

Теперь, однако, им следует придать более широкий смысл и считать, что разделение переменных на координаты и импульсы есть разделение переменных, описывающих движение, на две независимые группы, связанные друг с другом посредством уравнений Гамильтона почти симметричным образом.

§ 7.5. Принцип наименьшего действия. Другим вариационным принципом, подобным принципу Гамильтона, является принцип *наименьшего действия*. Если стремиться к наиболее общему определению, то под действием в механике следует понимать интеграл

$$A=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i p_i\dot{q}_i\,dt.$$

Принцип наименьшего действия утверждает, что в системе, в которой H остаётся постоянным, справедливо равенство

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}\sum_i p_i\dot{q}_i\,dt=0, \tag{7.31}$$

где Δ — так называемая полная вариация, определяемая ниже.

Как мы уже говорили, δ-вариация соответствует виртуальным перемещениям системы, т. е. таким перемещениям, при которых время t оставляют неизменным, а координаты варьируют в соответствии со связями, наложенными на систему. Такое перемещение не всегда принадлежит к числу перемещений, которые могут иметь место при движении системы. Это будет, например, в случае связей, зависящих от времени. Поэтому движение, получающееся в результате δ-вариации, может быть таким, что гамильтониан его не будет постоянным. В противоположность δ-вариации полная вариация Δ связана с перемещениями, которые обусловлены не только варьированием траектории, но и изменением времени t. Поэтому траектория, образующаяся при Δ-вариации, состоит из точек, получающихся в результате перемещений, обусловленных также дифференциалами времени. Вследствие этого мы можем потребовать, чтобы движения, получающиеся при Δ-вариациях, были физически возможными, для чего можно потребовать, чтобы H было постоянным не только на действительной траектории, но и на траекториях, получающихся в результате Δ-вариаций. Время движения вдоль таких траекторий уже не обязательно будет одним и тем же, так как для сохранения гамильтониана точке придётся ускорять или замедлять своё движение. Поэтому Δ-процесс предполагает варьирование t *даже в конечных точках* траектории, где вариации величин q_i по условию считаются равными нулю.

Следует заметить, что траектория, получающаяся в пространстве конфигураций в результате варьирования истинной траектории, может быть одинаковой как при δ-вариации, так и при Δ-вариации. Однако скорость движения изображающей точки вдоль полученной траектории будет при этом неодинаковой, так как в первом случае вариация её скорости должна быть такой, чтобы не менялось полное время движения, а во втором — чтобы не менялось H.

Для получения Δ-вариации можно ввести семейство кривых, зависящих от параметра α, подобно тому как это было сделано для δ-вариации. Однако сейчас нам нужно будет варьировать и время, связанное с каждой точкой на траектории, вследствие чего t нужно будет рассматривать как функцию α. Поэтому вариация координаты $q_i(t, \alpha)$ будет определяться не только явной зависимостью q_i от α, но и неявной зависимостью, осуществляемой через переменную t. Учитывая это, мы можем написать

$$\Delta q \to d\alpha\left(\frac{dq}{d\alpha}\right) = d\alpha\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha} + \dot{q}\,\frac{dt}{d\alpha}\right). \tag{7.32}$$

Но легко видеть, что

$$\delta q \to d\alpha\,\frac{\partial q}{\partial\alpha},$$

а $\frac{dt}{d\alpha}d\alpha$ представляет собой изменение времени t вследствие Δ-вариации, которое можно обозначить через Δt. Поэтому равенство (7.32) можно записать в виде

$$\Delta q = \delta q + \dot{q}\,\Delta t. \tag{7.33}$$

(Заметим, что Δ-варьирование и дифференцирование по времени являются операциями, порядок которых нельзя менять, подобно тому как это делалось при δ-варьировании.) Соотношение, подобное (7.33), справедливо также для любой функции $f(q, t)$, для которой оно имеет вид

$$\Delta f = \delta f + \dot{f}\,\Delta t. \tag{7.34}$$

Действительно, так как

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t,$$

то на основании (7.33) можно написать

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\delta q_i + \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Delta t,$$

что совпадает с (7.34), ибо первый член правой части этого равенства равен δf, а коэффициент при Δt представляет полную производную $\frac{df}{dt}$. Равенство (7.34) выражает единственно существенное для нас свойство Δ-вариации, и с помощью этого равенства мы докажем принцип наименьшего действия, обходясь без громоздких выражений, связанных с параметром α.

Действие A можно записать в виде

$$A=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i p_i\dot{q}_i\,dt=\int_{t_1}^{t_2}(L+H)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt+H(t_2-t_1) \qquad (7.35)$$

(так как $H=\text{const}$). Поэтому ΔA будет равно

$$\Delta A=\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt+H(\Delta t_2-\Delta t_1),$$

причём, варьируя этот интеграл, следует варьировать и его пределы. Обозначая первообразную от функции $L(t)$ через $I(t)$, будем иметь

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\Delta I(t_2)-\Delta I(t_1),$$

что с помощью формулы (7.34) можно записать в виде

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\delta I(t_2)-\delta I(t_1)+\dot{I}(t_2)\,\Delta t_2-\dot{I}(t_1)\,\Delta t_1$$

или окончательно

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt+L\,\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}. \qquad (7.36)$$

По поводу полученного равенства следует сделать одно замечание. Может показаться, что в соответствии с принципом Гамильтона первое слагаемое правой части этого равенства должно обращаться в нуль. Это, однако, неверно, так как принцип Гамильтона требует, чтобы в конечных точках траектории обращались в нуль вариации δq_i, тогда как в данном случае в этих точках обращаются в нуль вариации Δq_i. Однако вычисление вариации этого интеграла можно провести без особого труда. Согласно определению δ-вариации имеем

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt,$$

что с помощью уравнений Лагранжа можно записать в виде

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\sum_i\int\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right]dt=\sum_i\int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)dt.$$

Воспользовавшись теперь равенством (7.33), получим

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\Delta t\right)dt =$$
$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\Delta t\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2},$$

причём в конечных точках траектории все Δq_i обращаются в нуль, а $\Delta t \neq 0$, так как время движения не является постоянным. Поэтому будем иметь

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = -\sum_i p_i\dot q_i\,\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{7.37}$$

Учитывая теперь равенства (7.36) и (7.37), получим полную вариацию действия

$$\Delta A = \left(-\sum_i p_i\dot q_i + L - H\right)\Delta t\,\Big|_{t_1}^{t_2},$$

что согласно определению H равно нулю. Таким образом, принцип наименьшего действия доказан *).

Принципу наименьшего действия можно придать различные формы. Рассмотрим, например, случай, когда уравнения (1.36) не содержат время явным образом. Тогда согласно равенству (2.56) будем иметь (в нерелятивистской механике):

$$\sum_i p_i\dot q_i = 2T.$$

При этих условиях принцип наименьшего действия приобретает следующий вид:

$$\Delta\int T\,dt = 0. \tag{7.38}$$

Пусть, далее, на эту систему не действуют активные силы, как, например, в случае свободного твёрдого тела. Тогда T будет оставаться постоянным, и принцип наименьшего действия примет вид

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0. \tag{7.39}$$

Согласно равенству (7.39) траектория системы в пространстве конфигураций такова, что, двигаясь по этой траектории с заданной энергией, система проходит путь между двумя её точками в кратчай-

*) Принцип наименьшего действия обычно связывают с именем Мопертюи. Однако высказанный им в 1747 г. принцип имел туманную теологическую форму и вряд ли может в настоящее время рассматриваться как принцип механики. Строгой формулировкой и доказательством этого принципа мы обязаны Эйлеру и Лагранжу.

шее время (точнее, время этого движения является экстремальным). В данном случае принцип наименьшего действия напоминает известный принцип Ферма в геометрической оптике. Согласно этому принципу световой луч всегда выбирает тот путь, при котором время движения от данной точки A к данной точке B является наименьшим. Нам ещё представится случай вернуться к этим соображениям в главе 9, где будет рассматриваться связь между методом Гамильтона и геометрической оптикой.

Если система состоит из одной точки, то её кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|^2,$$

откуда

$$dt = \sqrt{\frac{m\,|d\boldsymbol{r}|^2}{2T}}.$$

Это равенство выражает dt через длину элемента траектории точки. В рассматриваемом случае принцип наименьшего действия в форме (7.38) можно записать в виде

$$\Delta \int 2T\,dt = \Delta \int \sqrt{2mT}\,ds = \Delta \int \sqrt{2m(H - V)}\,ds = 0, \qquad (7.40)$$

где вместо $\sqrt{|d\boldsymbol{r}|^2}$ мы пишем ds. Принцип наименьшего действия в форме (7.40) можно распространить и на систему, состоящую более чем из одной точки, обобщая понятие длины дуги. Пусть такая система описывается обобщёнными координатами q_i, причём согласно поставленному условию уравнения, описывающие зависимость $\boldsymbol{r}_j$ от q_i, не содержат времени. Тогда кинетическая энергия системы будет однородной квадратичной функцией обобщённых скоростей [см. уравнение (1.62)], и можно будет написать

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

или

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \frac{dq_i\,dq_k}{dt^2} \qquad (7.41)$$

(мы пишем m_{ik} вместо $2a_{ik}$). Если ввести теперь дифференциал $d\rho$ с помощью равенства

$$(d\rho)^2 = \sum_{i,k} m_{ik}\,dq_i\,dq_k, \qquad (7.42)$$

то кинетическая энергия T примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2, \qquad (7.43)$$

откуда

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{2T}}.$$

Если воспользоваться этим выражением для dt, то принцип наименьшего действия можно будет записать в виде

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T\,dt = \Delta \int \sqrt{T}\,d\rho = 0,$$

или окончательно

$$\Delta \int \sqrt{H - V(q)}\,d\rho = 0. \tag{7.44}$$

Полученное равенство имеет такую же форму, как равенство (7.40), относящееся к одной материальной точке. Принцип, выражаемый уравнением (7.44), часто называют *принципом наименьшего действия в форме Якоби.*

Введённый нами дифференциал $d\rho$ имеет формальный характер, однако он приводит к весьма изящной интерпретации, которую мы сейчас рассмотрим.

В дифференциальной геометрии равенство типа (7.42) является наиболее общим равенством, определяющим элемент длины кривой в n-мерном пространстве с координатами $q_1, \ldots, q_n$. При такой интерпретации коэффициенты m_{ik} будут коэффициентами так называемой *фундаментальной метрической формы.* Если, например, q_i будут декартовыми координатами обычного пространства, то эта форма будет очень простой и коэффициенты её будут равны

$$m_{ik} = \delta_{ik},$$

что ясно из сравнения формулы

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

с равенством (7.42). Вообще для любых криволинейных ортогональных координат матрица коэффициентов m_{ik} будет диагональной (но диагональные элементы её не обязательно будут равны, как в случае декартовых координат). В случае, например, цилиндрических координат элемент длины будет равен

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + (dz)^2,$$

так что отличными от нуля коэффициентами здесь будут лишь m_{rr}, $m_{\theta\theta}$ и m_{zz}, равные

$$m_{rr} = 1, \quad m_{\theta\theta} = r^2, \quad m_{zz} = 1.$$

Если же криволинейные координаты не являются ортогональными, то матрица коэффициентов m_{ik} не будет диагональной.

Таким образом, дифференциал $d\rho$ можно интерпретировать как длину элемента траектории в пространстве конфигураций с координатами $q_1, \ldots, q_n$. В общем случае они не являются декартовыми, а представляют координаты пространства, метрика которого определяется коэффициентами m_{ik} из равенства (7.41). Тогда $\sqrt{2T}$ будет равняться скорости, с которой изображающая точка движется вдоль своей траектории в пространстве конфигураций. Если на систему не действуют силы, и поэтому T постоянно, то будет постоянной и скорость движения этой точки, из чего можно сделать вывод, что она будет двигаться вдоль кривой наименьшей длины, т. е. вдоль одной из *геодезических линий* пространства конфигураций.

Следует подчеркнуть, что в принципе наименьшего действия в форме Якоби рассматривается траектория изображающей точки, а не закон её движения по этой траектории. Это видно из того, что уравнение (7.44) содержит элемент траектории $d\rho$ и не содержит времени t, так как $H=\mathrm{const}$, а V зависит только от q_i. Поэтому из принципа наименьшего действия в форме Якоби можно получить дифференциальные уравнения траектории изображающей точки. Это лучше всего сделать посредством введения какого-либо параметра, например расстояния вдоль траектории. Тогда уравнение (7.44) можно будет записать в виде

$$\Delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{H-V} \sqrt{\sum_{i,k} m_{ik} \frac{dq_i}{d\theta} \frac{dq_k}{d\theta}}\, d\theta = 0, \tag{7.45}$$

где θ — указанный параметр (его не следует смешивать со временем t; он должен быть геометрической характеристикой, определяющей положение точки на траектории). Если выбрать его так, чтобы он не изменялся при смещениях точек траектории во время Δ-вариации, то по отношению к нему Δ-вариация будет подобна δ-вариации. Тогда из уравнения (7.45) можно будет получить дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа, определяющие траекторию изображающей точки. Если производные $\frac{dq_i}{d\theta}$ обозначить через q_i', то эти уравнения будут иметь вид

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \tag{7.46}$$

где $F(q_i, q_i', \theta, H)$ — функция, стоящая под знаком интеграла (7.45).

Если рассматриваемая система состоит всего из одной точки, положение которой определяется координатами q_i, то уравнения (7.46) будут определять её траекторию в собственном смысле этого слова (а не траекторию изображающей точки в пространстве конфигураций). Координаты q_i могут быть при этом и не декартовыми, а движение точки может быть ограничено связями, заставляющими её двигаться не в трёх измерениях, а в двух, т. е. по некоторой поверхности. Тогда её положение на этой поверхности будет определяться координатами q_1 и q_2, а $d\rho$ будет, очевидно, пропорционально элементу длины её траектории. Уравнения (7.46) будут тогда определять траекторию этой точки на поверхности, по которой она движется. В том частном случае, когда на точку не действуют никакие активные силы, её траекторией будет одна из геодезических линий этой поверхности (как и в случае траектории в пространстве конфигураций). Если такой поверхностью будет, например, сфера, то точка будет двигаться по большому кругу, так как он является геодезической линией сферы.

Число подобных вариационных принципов классической механики весьма велико. Так, например, из принципа наименьшего действия непосредственно вытекает *принцип Герца наименьшей кривизны*. Согласно этому принципу точка, на которую не действуют активные силы, движется вдоль траектории наименьшей кривизны, что можно получить непосредственно из принципа Якоби, так как согласно этому принципу траекторией такой точки должна быть геодезическая линия, являющаяся, как известно, линией наименьшей кривизны.

Мы уже говорили, что вариационные принципы не вносят в механику нового физического содержания и редко упрощают практическое решение той или иной механической задачи. Их главное достоинство состоит в том, что они служат отправными точками новых теоретических концепций в классической механике. В этом отношении особенно плодотворен принцип Гамильтона, а также принцип наименьшего действия, хотя и не в такой степени. Что касается других принципов, то они имеют заметно меньшее применение (если не считать бессодержательных телеологических теорий, которые иногда строятся на их основе). Поэтому рассмотрение этих принципов представляется нам нецелесообразным.

Задачи

1. Напишите уравнения Гамильтона для двух материальных точек, сила взаимодействия которых направлена по прямой, соединяющей эти точки. Исключите циклические переменные и сведите задачу к квадратурам.

2. Вычислите гамильтониан системы, описанной в задаче 5 главы 5, и получите для неё уравнения Гамильтона.

3. Вычислите гамильтониан тяжёлого симметричного волчка с одной неподвижной точкой и напишите для него уравнения Гамильтона. Сравните их с уравнениями движения, рассмотренными в § 5.7. Покажите, как свести решение этой задачи к квадратурам.

4. Точка находится в инерциальной системе xyz и на неё действует консервативная сила, зависящая только от z и $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Вычислите её гамильтониан, приняв в качестве обобщённых координат декартовы координаты этой точки относительно системы, равномерно вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью ω. Каков физический смысл этого гамильтониана? Является ли он константой движения?

5. В задаче 4 главы 1 рассматривался электродинамический потенциал, зависящий от скорости. Каков гамильтониан частицы, движущейся под действием такого потенциала?

6. В главе 6 указывалось, что первый член ковариантного релятивистского лагранжиана (6.57) является в некоторой степени произвольным. Другая возможная форма лагранжиана получается, если преобразовать принцип Гамильтона (6.48) (перейдя от времени t к местному времени τ, являющемуся инвариантом Лоренца) и использовать новую подынтегральную функцию в качестве L'. Получить таким путём выражение для ковариантного гамильтона частицы, находящейся в электромагнитном поле. Показать, что *значение* этого гамильтониана равно нулю. (При получении уравнений движения значение гамильтониана, конечно, не существенно, так как нас интересует только его *функциональная зависимость* от координат и импульсов.)

7. Показать, что если ковариантный лагранжиан получается по способу, указанному в предыдущей задаче, то уравнение Гамильтона для $\frac{dp_4}{d\tau}$ сводится к уравнению (7.19).

Рекомендуемая литература

P. S. Epstein, Textbook of Thermodynamics.

В §§ 33 и 34 этого учебника имеются примеры получения новых термодинамических функций с помощью преобразования Лежандра.

E. T. Whittaker, Analytical Dynamics.

Вариационные принципы классической механики можно связать с вопросами, которые на первый взгляд могут показаться далёкими от них. Например, имеется тесная связь принципа Гамильтона с общей теорией дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Некоторые из таких вопросов мы рассмотрим в следующих главах, однако среди них есть немало таких, которые рассматривать в нашей книге нецелесообразно. К их числу относится вопрос о том, является ли экстремум интеграла $\int L\,dt$ максимумом или минимумом, а также вопросы, связанные с рассмотрением многих разновидностей вариационных принципов. Читатель, интересующийся такими вопросами, найдёт обширную литературу. В список литературы, которую мы здесь указываем, включены лишь немногие из таких книг, среди которых книга Уиттекера является одной из основных. К вопросам, рассмотренным в настоящей главе, относятся глава IX и два первых параграфа главы X цитируемой книги.

A. G. Webster, Dynamics of Particles.

В главе IV этой книги содержится пространное и часто недостаточно последовательное изложение вариационных принципов и их выводов, которое сопровождается подробно разобранными примерами. Книга даёт ясное представление об основных направлениях классической механики в начале этого столетия.

L. Nordheim, Die Prinzipe der Dynamik (Handbuch der Physik, т. V).

Эта статья содержит достаточно полное изложение различных интегральных и дифференциальных принципов, могущих быть положенными в основу классической механики.

Две первые части следующей статьи этого тома, написанной Нордхеймом и Фюзом, представляют легко читаемое введение в теорию уравнений Гамильтона.

C. S c h a e f e r, Die Prinzipe der Dynamik.

Эта небольшая книга объёмом всего в 76 стр. содержит полное изложение различных принципов механики, в том числе вариационных. (К сожалению, автор пользуется совершенно неупотребительными обозначениями, применяя для лагранжиана символ H, а для гамильтониана — символ R.)

R. L. L i n d s a y and H. M a r g e n a u, Foundations of Physics.

Принцип Гамильтона и принцип наименьшего действия формулируется так, что может создаться впечатление, будто механические системы «знают» ту конечную конфигурацию, к которой они движутся. Хотя это, разумеется, неверно, так как движение системы определяется только начальными условиями, однако в прошлом на этом основывались различные философские толкования указанных принципов. Этот и аналогичные вопросы рассматриваются в главе 3 цитируемой книги, где указывается литература по данной теме.

ГЛАВА 8

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

При прямом применении уравнений Гамильтона математические трудности решения задач механики обычно существенно не уменьшаются, так как при этом нам приходится иметь дело с такими же дифференциальными уравнениями, как и в методе Лагранжа. Преимущества метода Гамильтона заключаются не в его математической ценности, а в том, что он более глубоко проникает в структуру механики, так как равноправность координат и импульсов как независимых переменных предоставляет бо́льшую свободу для выбора величин, которые мы принимаем за «координаты» и «импульсы». В результате мы приходим к новым, более абстрактным формам изложения физической сущности механики. Хотя полученные таким путём методы могут оказать некоторую помощь при решении задач механики, однако с современной точки зрения их главная ценность состоит в том, что они играют существенную роль в построении новых теорий. В частности, именно эти абстрактные концепции классической механики были исходными пунктами в построении статистической механики и квантовой теории. Изложению такого рода концепций, получающихся из уравнений Гамильтона, и посвящаются эта и следующая главы.

§ 8.1. Уравнения канонических преобразований. Рассмотрим систему, гамильтониан которой является константой движения, а *все* координаты q_i являются циклическими. В этом случае обобщённые импульсы p_i будут просто постоянными, т. е. будут иметь место равенства

$$p_i = \alpha_i,$$

а так как рассматриваемый гамильтониан не содержит явно времени и циклических координат, то можно написать

$$H = H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Поэтому уравнения Гамильтона для $\dot{q}_i$ будут иметь вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i, \tag{8.1}$$

где ω_i — функции только α_i, т. е. также некоторые постоянные. Интегрируя уравнения (8.1), будем иметь

$$q_i = \omega_i t + \beta_i, \tag{8.2}$$

где β_i — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Таким образом, задача о движении рассматриваемой системы решается очень просто.

Может показаться, что рассмотренная задача имеет лишь академический интерес, так как все обобщённые координаты редко бывают циклическими. Однако каждая материальная система может быть описана с помощью обобщённых координат не единственным образом. Рассматривая, например, движение точки в плоскости, можно взять в качестве её обобщённых координат либо декартовы координаты x, y, либо полярные координаты r, θ. Каждый из этих вариантов, конечно, одинаково допустим, и вопрос о том, какой из них лучше, определяется конкретными особенностями рассматриваемой задачи. В случае, например, центральных сил координаты x, y являются менее удобными, так как ни одна из них не является циклической, в то время как среди координат r, θ есть циклическая — угол θ. Следовательно, цикличность координат связана со способом их выбора, и в каждом конкретном случае можно подобрать такую систему обобщённых координат, что все они будут циклическими. Разумеется, если такая система будет найдена, то дальнейшее решение задачи станет тривиальным. Но так как те обобщённые координаты, которые мы рассматриваем как наиболее естественные для данной системы, обычно не являются циклическими, то мы должны разработать специальную процедуру для *перехода* от одной системы координат к другой, являющейся более подходящей.

Преобразования, с которыми мы встречались до сих пор, представляли переход от старых координат q_i к новым координатам Q_i. Такие преобразования выражались уравнениями вида

$$Q_i = Q_i(q, t). \tag{8.3}$$

Такой вид имели, например, уравнения ортогонального преобразования или уравнения перехода от декартовых координат к полярным. Мы будем называть такие преобразования *точечными*. Однако в методе Гамильтона импульсы являются такими же независимыми переменными, как и обобщённые координаты. Поэтому мы должны расширить понятие преобразования координат и включить в него одновременное преобразование как независимых *координат* q_i, так и независимых *импульсов* p_i. Таким образом, мы будем иметь дело с преобразованием, описываемым уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t), \\ P_i &= P_i(q, p, t), \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

где Q_i — новые координаты, а P_i — новые импульсы. Следовательно, новые координаты будут выражаться не только через старые координаты q_i, но и через старые импульсы p_i.

Желая сохранить структуру исходных уравнений движения, мы будем интересоваться лишь такими преобразованиями, при которых новые переменные Q, P являются каноническими. Следовательно, мы требуем, чтобы новые уравнения имели ту же форму, что и уравнения Гамильтона, т. е. записывались в виде:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \tag{8.5}$$

где $K(Q, P, t)$ — некоторая функция новых переменных и времени, играющая роль нового гамильтониана. Преобразования, удовлетворяющие этому условию, называются *каноническими* *).

Так как переменные Q_i и P_i должны быть каноническими, то они должны удовлетворять принципу Гамильтона, записанному в этих переменных, т. е. должны удовлетворять уравнению

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)\right] dt = 0. \tag{8.6}$$

В то же время старые переменные будут, конечно, удовлетворять принципу

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)\right] dt = 0. \tag{8.7}$$

Таким образом, равенства (8.6) и (8.7) будут удовлетворяться одновременно. Отсюда не следует, конечно, что функции, стоящие в этих равенствах под знаком интеграла, будут одинаковы, но следует, что они могут отличаться не больше, чем на полную производную

---

*) Применяется также термин *контактное преобразование*. Иногда эти понятия различаются, но разные авторы делают это по-разному. Некоторые из них (например, А. Зоммерфельд в книге «Atomic Structure and Spectral Lines») относят к контактным преобразованиям лишь такие, при которых время не содержится явным образом в уравнениях преобразования [см. уравнения (8.4)]. Другие же (возможно, более корректно) понимают под контактными преобразованиями такие, при которых временная координата t преобразовывается наряду с координатами q_i и импульсами p_i, как это делается в ковариантной релятивистской теории. Физики, однако, склонны рассматривать эти два понятия как тождественные, и мы здесь будем следовать их примеру. О применении контактных преобразований в проективной геометрии (где, как можно предполагать, и появился этот термин) можно прочесть в уже упоминавшейся книге Зоммерфельда, а также у Каратеодори в книге «Variationsrechnung».

по времени от какой-либо функции F. Действительно, интеграл от разности рассматриваемых функций будет тогда равен

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\,dt = F(2) - F(1),$$

и, какова бы ни была функция F, вариация его будет равна нулю, так как в конечных точках интегрирования δF обращается в нуль. Функция F называется *производящей функцией* данного преобразования. Мы увидим, что, задавая произвольно функцию F, мы однозначно определяем уравнения преобразования (8.4).

Функция F, определяющая переход от старых канонических переменных к новым, должна быть функцией как тех, так и других. Поэтому, кроме времени t, она может содержать $4n$ переменных. Но так как старые и новые переменные связаны $2n$ уравнениями преобразования (8.4), то независимыми из них будут только $2n$. Поэтому производящую функцию F можно записать в одном из следующих четырёх видов:

$$F_1(q, Q, t), \quad F_2(q, P, t), \quad F_3(p, Q, t), \quad F_4(p, P, t).$$

Вопрос о том, какой из этих форм пользоваться, связан с конкретными особенностями рассматриваемой задачи. Если, например, мы желаем произвести точечное преобразование [определяемое уравнением (8.3)], то q и Q не будут независимыми переменными, и поэтому производящие функции типа F_1 следует исключить.

Если мы исходим из функции вида F_1, то функции, стоящие под знаками интегралов (8.6) и (8.7), будут связаны соотношением

$$\sum p_i\dot{q}_i - H = \sum P_i\dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}F_1(q, Q, t), \tag{8.8}$$

где

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Но так как старые и новые координаты рассматриваются здесь как независимые переменные, то равенство (8.8) будет иметь место только тогда, когда коэффициенты при $\dot{q}_i$ и $\dot{Q}_i$ будут в левой части этого равенства такими же, как и в правой. Таким образом, в рассматриваемом случае будем иметь:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \tag{8.9a}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \tag{8.9b}$$

и

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{8.9c}$$

Уравнения (8.9a) представляют n соотношений, содержащих только p_i, q_i, Q_i и t. С их помощью можно выразить все Q_i через p_i, q_i и t. Таким путём мы получим первую часть уравнений преобразования (8.4). После этого мы можем воспользоваться равенствами (8.9b) и получить оставшиеся уравнения преобразования (8.4), для чего достаточно подставить в (8.9b) найденные зависимости $Q_i=Q_i(p_i, q_i, t)$. Наконец, уравнение (8.9c) даёт нам возможность получить новый гамильтониан K.

Если в качестве независимых переменных выбрать q_i и P_i, то мы будем иметь дело с производящей функцией типа F_2. Следует, однако, заметить, что переход от независимых переменных q, Q к независимым переменным q, P может быть выполнен посредством преобразования Лежандра, так как согласно (8.9b)

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i.$$

Это показывает, что производящую функцию F_2 можно получить из F_1 с помощью соотношения

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i. \tag{8.10}$$

Разрешая это соотношение относительно F и подставляя полученный результат в равенство (8.8), мы получаем

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - H = \sum_i P_i\dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}\left[F_2(q, P, t) - \sum_i Q_i P_i\right] =$$
$$= -\sum_i Q_i\dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t).$$

Повторяя теперь процедуру, проделанную нами с равенством (8.8), т. е. раскрывая производную $\frac{d}{dt}F_2(q, P, t)$ и приравнивая соответствующие коэффициенты при $\dot{q}_i$ и $\dot{P}_i$, мы получаем следующие уравнения преобразования:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \tag{8.11a}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \tag{8.11b}$$

и

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{8.11c}$$

Выразив из уравнений (8.11a) P_i через q_i, p_i и t, мы получим вторую группу уравнений (8.4). Первая группа этих уравнений может после этого быть получена с помощью уравнений (8.11b). Из (8.9a) видно, что производящую функцию $F_3(p, Q, t)$ тоже можно связать с F_1

посредством преобразования Лежандра. Таким образом, будем иметь

$$F_1(q, Q, t) = \sum q_i p_i + F_3(Q, p, t), \tag{8.12}$$

и поэтому равенство (8.8) принимает вид

$$-\sum q_i \dot{p}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F_3(p, Q, t). \tag{8.13}$$

Приравнивая теперь соответствующие коэффициенты, мы приходим к уравнениям:

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \tag{8.14a}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \tag{8.14b}$$

и

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \tag{8.14c}$$

Как и ранее, мы из (8.14a) можем получить Q_i как функции q, p, t, и тогда уравнения (8.14b) дадут нам новые импульсы P_i, выраженные через старые переменные.

Наконец, в случае, когда в качестве независимых переменных берутся импульсы p_i и P_i, производящая функция F_4 может быть связана с F_1 двойным преобразованием Лежандра

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i - \sum_i p_i q_i. \tag{8.15}$$

Тогда равенство (8.8) примет вид

$$-\sum q_i \dot{p}_i - H = -\sum Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_4(p, P, t), \tag{8.16}$$

и поэтому будем иметь:

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \tag{8.17a}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \tag{8.17b}$$

и

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \tag{8.17c}$$

Во всех этих рассуждениях время рассматривалось как инвариантный параметр, не преобразующийся вместе с координатами и импульсами. Такое преобразование времени автоматически совершается в релятивистской теории уравнений Гамильтона, где инвариантным параметром системы является местное время τ, а обычное время t играет роль одной из координат. Мы, однако, сейчас увидим, что в обычное каноническое преобразование тоже можно ввести изменение масштаба времени (отличное от того, которое даётся преобразованием Лоренца).

Так как мы не будем более считать время инвариантным, то нужно ввести некоторый другой параметр, который займёт теперь его место. Роль такого параметра может играть любая инвариантная величина, характеризующая степень продвижения системы вдоль её траектории в пространстве конфигураций. Обозначая этот параметр через θ, мы можем записать модифицированный принцип Гамильтона в виде

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_i^n p_i \dot{q}_i \frac{dt}{d\theta} - H \frac{dt}{d\theta} \right) d\theta = 0,$$

или

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_i^n p_i \frac{dq_i}{d\theta} - H \frac{dt}{d\theta} \right) d\theta = 0.$$

Форма этого равенства показывает, что t можно рассматривать как $(n+1)$-ю обобщённую координату, а H — как соответствующий ей обобщённый импульс *). Поэтому модифицированный принцип Гамильтона можно записать также в виде

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q_i' \, d\theta = 0,$$

где через q_i' обозначена производная $\frac{dq_i}{d\theta}$. После канонического преобразования переменных (включая t) этот принцип примет вид

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{i=1}^{n+1} P_i Q_i' \, d\theta = 0,$$

где Q_{n+1} — преобразованное время, а P_{n+1} — новый гамильтониан K. Следуя теперь той же процедуре, которая применялась нами раньше, мы можем ввести производящую функцию $G(q_i, P_i)$ и с её помощью получить $(2n+2)$ равенства:

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i},$$

определяющие искомые уравнения преобразования.

Таким образом, мы можем получить канонические преобразования, содержащие изменения масштаба времени. Однако в дальнейшем мы всюду будем предполагать, что время является инвариантом, не подвергающимся преобразованию.

*) Это немного напоминает релятивистское равенство $p_4 = iH/c$, где p_4 — обобщённый импульс, соответствующий координате $x_4 = ict$. Однако это сходство является чисто формальным и не указывает на какую-либо физическую связь со специальной теорией относительности.

§ 8.2. Примеры канонических преобразований. Рассмотрим теперь несколько простых, но важных примеров канонических преобразований, осуществляемых различными производящими функциями.

Пусть производящая функция типа F_2 имеет вид

$$F_2 = \sum_i q_i P_i. \tag{8.18}$$

В этом случае мы из уравнений (8.11) будем иметь:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i,$$
$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i$$

и

$$K = H.$$

Следовательно, новые координаты будут в этом случае совпадать со старыми, т. е. рассматриваемое преобразование будет *тождественным.*

Более общим является преобразование, осуществляемое производящей функцией

$$F_2 = \sum_i f_i(q_1, \ldots, q_n, t) P_i, \tag{8.19}$$

где f_i — произвольные функции указанных аргументов. В этом случае мы с помощью уравнений (8.11b) получим следующие выражения для новых координат Q_i:

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t). \tag{8.20}$$

Следовательно, при таком виде производящей функции новые координаты будут зависеть только от старых координат и от времени, но не от старых импульсов. Поэтому такое преобразование принадлежит к числу точечных преобразований, определяемых уравнениями (8.3). Но так как функции f_i в равенстве (8.19) являются совершенно произвольными, то можно заключить, что *все точечные преобразования являются каноническими.* Уравнение (8.11c) выражает новый гамильтониан таких преобразований через старый и через производные $\frac{\partial f_i}{\partial t}$.

Ортогональные преобразования, подробно рассмотренные нами в главах 4 и 6, являются частными случаями точечных преобразований. Функции f_i выражаются в этом случае равенствами

$$f_i = Q_i = \sum_k a_{ik} q_k,$$

и поэтому производящая функция F_2 имеет вид

$$F_2 = \sum_{i,k} a_{ik} q_k P_i.$$

Новые импульсы находятся в этом случае из уравнений (8.11a), которые будут иметь вид

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_i a_{ik} P_i. \qquad (8.21)$$

Для того чтобы разрешить эти уравнения относительно P_i, достаточно умножить их на a_{jk} и просуммировать по k:

$$\sum_k a_{jk} p_k = \sum_{i,\,k} a_{jk} a_{ik} P_i = \sum_i \delta_{ij} P_i$$

$\left(\text{так как из условий ортогональности следует, что } \sum_k a_{jk} a_{ik} = \delta_{ij}\right)$. Таким образом, окончательно будем иметь

$$P_i = \sum_k a_{ik} p_k. \qquad (8.22)$$

Отсюда видно, что импульсы здесь подвергаются тому же ортогональному преобразованию, что и координаты (как и следовало ожидать заранее).

Интересное преобразование получается при производящей функции $F_1(q, Q, t)$, равной

$$F_1 = \sum_k q_k Q_k.$$

Согласно (8.9a) и (8.9b) уравнения преобразования бvдут тогда иметь вид:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i,$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i,$$

т. е. это преобразование меняет местами координаты и импульсы (новые координаты совпадают здесь со старыми импульсами, а новые импульсы не отличаются по существу от старых координат). Этот простой пример может служить иллюстрацией равноправного положения обобщённых координат и обобщённых импульсов, в равной степени описывающих движение системы в уравнениях Гамильтона. Различие между ними практически состоит лишь в названии, так как мы видим, что, поменяв эти названия, мы получили всего лишь изменение знака. Поэтому мы можем отбросить наши первоначальные представления о q как о пространственной координате и о p как о произведении массы на скорость. В данном случае из уравнений

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

непосредственно видно, что это преобразование является каноническим. Если подставить здесь Q_i вместо P_i и $-P_i$ вместо Q_i, то эти уравнения сохранят каноническую форму.

В качестве последнего примера рассмотрим производящую функцию

$$F_1 = \frac{m}{2}\omega q^2 \operatorname{ctg} Q, \tag{8.23}$$

где m и ω — постоянные, смысл которых будет выяснен позже. При такой производящей функции уравнения (8.9а) принимают вид:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q, \tag{8.24}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}. \tag{8.25}$$

Эти уравнения можно было бы решить относительно Q и P, выразив эти величины через q и p, но для наших целей более удобно поступить наоборот: выразить старые переменные через новые. Из уравнения (8.25) имеем

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q. \tag{8.26}$$

Подставив это выражение в равенство (8.24), получим

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \tag{8.27}$$

Так как производящая функция (8.23) не содержит явным образом t, то новый гамильтониан K равен старому гамильтониану H, и поэтому нам остаётся только выразить H через Q и P. Пусть константы m и ω обозначают массу и собственную частоту линейного гармонического осциллятора. Потенциальная энергия его, как известно, равна

$$V = \frac{kq^2}{2},$$

где k — коэффициент восстанавливающей силы. Поэтому гамильтониан этого осциллятора имеет вид

$$H = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2},$$

или, заменяя k/m на ω^2, получаем

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \tag{8.28}$$

Подставив сюда правые части уравнений (8.26) и (8.27), мы получим следующее выражение гамильтониана H через новые переменные:

$$H = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P. \tag{8.29}$$

Таким образом, этот гамильтониан является циклическим относительно Q, и поэтому импульс P должен быть величиной постоянной.

Из равенства (8.29) видно, что он равен полной (постоянной) энергии, делённой на ω:

$$P=\frac{E}{\omega}.$$

Уравнение, определяющее Q, принимает теперь следующий простой вид:

$$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P}=\omega.$$

Решая его, находим

$$Q=\omega t+\alpha,$$

где α — постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями. Из равенства (8.26) получаем следующую зависимость q от t:

$$q=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t+\alpha). \tag{8.30}$$

Эта формула даёт хорошо известное решение задачи о гармоническом осцилляторе.

Может показаться, что применение канонического преобразования к задаче о гармоническом осцилляторе подобно «стрельбе из пушки по воробьям». Однако мы имеем здесь простой пример того, как посредством канонических преобразований можно сделать все координаты циклическими. Рассмотрение общих схем решения механических задач с помощью этого метода мы отложим до следующей главы, а сейчас перейдём к изложению общих свойств канонических преобразований.

§ 8.3. Интегральные инварианты Пуанкаре. Каноническими преобразованиями мы называем такие преобразования, при которых уравнения Гамильтона сохраняют свою форму. Однако при канонических преобразованиях существуют и другие инварианты, в частности интегральные инварианты Пуанкаре. К рассмотрению их мы сейчас и перейдём.

Подобно тому как мы ввели пространство конфигураций, мы введём сейчас так называемое *фазовое пространство*, под которым будем понимать $2n$-мерное декартово пространство с координатами $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. Тогда каждому состоянию данной механической системы будет отвечать определённая точка этого пространства. Эту точку можно рассматривать как изображение системы, отражающее не только конфигурацию этой системы, но и её импульсы. Теперь мы можем перейти к формулировке теоремы Пуанкаре. Эта теорема гласит, что

$$J_1=\iint\limits_S \sum_i dq_i\,dp_i \tag{8.31}$$

является инвариантом любого канонического преобразования. Символ S означает здесь произвольную двумерную поверхность в фазовом пространстве.

Переходя к доказательству этой теоремы, прежде всего заметим, что положение точки на двумерной поверхности определяется двумя какими-либо параметрами. Пусть на поверхности S такими параметрами будут u и v. Тогда будем иметь: $q_i = q_i(u, v)$, $p_i = p_i(u, v)$. Как известно, связь между элементом площади $dq_i\,dp_i$ и элементом площади $du\,dv$ определяется якобианом

$$\frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{8.32}$$

и имеет вид

$$dq_i\,dp_i = \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)}\,du\,dv. \tag{8.33}$$

Поэтому равенство

$$\iint\limits_S \sum_i dq_i\,dp_i = \iint\limits_S \sum_k dQ_k\,dP_k,$$

выражающее утверждение, что интеграл J_1 не изменяется при канонических преобразованиях, можно записать в виде

$$\iint\limits_S \sum_i \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)}\,du\,dv = \iint\limits_S \sum_k \frac{\partial (Q_k, P_k)}{\partial (u, v)}\,du\,dv.$$

Но так как область интегрирования является здесь произвольной, то эти интегралы могут быть равны только в том случае, когда выполняется равенство

$$\sum_i \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} = \sum_k \frac{\partial (Q_k, P_k)}{\partial (u, v)}. \tag{8.34}$$

Следовательно, доказательство инвариантности интеграла J_1 сводится к доказательству инвариантности суммы якобианов.

Рассмотрим каноническое преобразование, получаемое с помощью производящей функции типа $F_2(q, P, t)$ *). В этом случае из уравнений (8.11а) мы будем иметь

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right).$$

---

*) Это требование не является обязательным, так как рассматриваемое доказательство можно провести и в случае производящей функции другого типа, в чём читатель может легко убедиться самостоятельно.

Но производная $\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ зависит от u только через аргументы q_k и P_k, и поэтому можно написать

$$\frac{\partial p_i}{\partial u}=\sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial u}+\sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial u}, \tag{8.35}$$

а также аналогичное выражение для частной производной $\frac{\partial p_i}{\partial v}$. Подставляя теперь полученные выражения в сумму детерминантов, входящих в левую часть (8.34), будем иметь:

$$\sum_i \frac{\partial(q_i,\,p_i)}{\partial(u,\,v)}=\sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \sum\limits_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial u}+\sum\limits_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \sum\limits_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial v}+\sum\limits_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Разбивая, далее, каждый детерминант на два, а также вынося общие множители каждого столбца за знак полученных детерминантов, мы можем записать это равенство в виде

$$\sum_i \frac{\partial(q_i,\,p_i)}{\partial(u,\,v)}=\sum_{i,\,k}\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial q_k}\begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v}\end{vmatrix}+\sum_{i,\,k}\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\partial P_k}\begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Но первая из сумм правой части этого равенства, очевидно, равна нулю, так как при перемене местами индексов i и k столбцы детерминантов этой суммы меняются местами, в то время как эта сумма не должна зависеть от порядка написания индексов i и k. Вместо этой суммы мы можем поставить любую другую, имеющую такую же структуру и поэтому также равную нулю. Так, например, мы можем написать:

$$\sum_i \frac{\partial(q_i,\,p_i)}{\partial(u,\,v)}=\sum_{i,\,k}\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i\partial P_k}\begin{vmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial P_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v}\end{vmatrix}+\sum_{i,\,k}\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial P_k}\begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

При каждом фиксированном k правая часть этого равенства может быть записана в виде одного детерминанта, в котором первый элемент левого столбца равен

$$\sum_i \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i\,\partial P_k}\frac{\partial P_i}{\partial u}+\sum_i \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i\,\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial P_k}.$$

Аналогично второй элемент левого столбца этого детерминанта будет равен

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F_2}{\partial P_k}\right).$$

Но согласно (8.11b)

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q_k,$$

и следовательно,

$$\sum_i \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} = \sum_k \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_k}{\partial u} & \dfrac{\partial P_k}{\partial u} \\ \dfrac{\partial Q_k}{\partial v} & \dfrac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_k \frac{\partial (Q_k, P_k)}{\partial (u, v)},$$

что и доказывает теорему Пуанкаре.

Аналогичным способом, хотя и более сложно, можно доказать, что интеграл

$$J_2 = \iiiint\limits_S \sum dq_i\, dp_i\, dq_k\, dp_k \tag{8.36}$$

также является инвариантом канонического преобразования. (S здесь означает произвольную четырёхмерную поверхность фазового пространства.) Продолжая так дальше, можно получить целую последовательность интегральных инвариантов, последний из которых будет иметь вид

$$J_n = \int \ldots \int dq_1 \ldots dq_n\, dp_1 \ldots dp_n. \tag{8.37}$$

В этом инварианте интегрирование совершается по произвольной области фазового пространства, и поэтому инвариантность интеграла J_n эквивалентна утверждению, что объём любой части фазового пространства не изменяется при канонических преобразованиях. Как мы покажем в дальнейшем, отсюда следует, что этот объём не изменяется со временем.

§ 8.4. Скобки Лагранжа и скобки Пуассона как канонические инварианты. Условие инвариантности суммы якобианов (8.34) может быть записано в виде

$$\sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u} \frac{\partial Q_i}{\partial v} \right). \tag{8.38}$$

Каждая часть этого равенства имеет вид так называемых *скобок Лагранжа*. Под скобками Лагранжа относительно переменных u и v понимается сумма

$$\{u, v\}_{q, p} = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right). \tag{8.39}$$

Равенство (8.38) показывает, что скобки Лагранжа представляют собой инвариант канонических преобразований. Поэтому не существенно, какая именно система канонических переменных применяется при вычислении этих скобок. Это даёт нам право опускать индексы q, p, и поэтому в дальнейшем мы будем писать скобки Лагранжа в виде $\{u, v\}$. Заметим попутно, что

$$\{u, v\} = -\{v, u\}. \tag{8.40}$$

Параметры u и v являются координатами точек некоторого двумерного многообразия в фазовом пространстве. Возьмём в качестве такого многообразия плоскость $q_i q_j$ и вычислим скобку Лагранжа $\{q_i, q_j\}$. При этом можно, конечно, пользоваться любой системой канонических переменных, например переменными q, p, которые, очевидно, наиболее удобны. Тогда скобка $\{q_i, q_j\}$ примет вид

$$\{q_i, q_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right).$$

Но так как величины q и p являются независимыми, то

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 = \frac{\partial p_k}{\partial q_j}$$

и, следовательно,

$$\{q_i, q_j\} = 0. \tag{8.41a}$$

Точно так же доказывается и равенство

$$\{p_i, p_j\} = 0. \tag{8.41b}$$

Пусть теперь $u = q_i$ и $v = p_j$. Тогда скобка Лагранжа будет иметь вид

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} - \frac{\partial q_k}{\partial p_j} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right),$$

причём так как

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_j} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0,$$

то второй член разности, стоящей в скобках, обращается в нуль. Однако первый член этой разности будет отличен от нуля, так как

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{kj} \quad \text{и} \quad \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \delta_{ki}.$$

Поэтому рассматриваемая скобка Лагранжа принимает вид

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \delta_{jk} \delta_{ki} = \delta_{ij}. \tag{8.41c}$$

Равенства (8.41), очевидно, справедливы для любой системы канонических переменных. Фигурирующие в них скобки часто называют *фундаментальными скобками Лагранжа*.

Более удобными являются так называемые *скобки Пуассона*, которые определяются следующим образом:

$$[u,\ v]_{q,\,p}=\sum_k\left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k}-\frac{\partial v}{\partial q_k}\frac{\partial u}{\partial p_k}\right), \tag{8.42}$$

причём легко видеть, что

$$[u,\ v]=-[v,\ u]. \tag{8.43}$$

Между скобками Лагранжа и скобками Пуассона существует определённая связь, которую мы докажем, не опираясь на физический смысл входящих в них величин. Эта связь выражается следующей теоремой: если $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{2n}$ суть независимые функции переменных $q_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n$, то справедливо равенство

$$\sum_{l=1}^{2n}\{u_l,\ u_i\}\,[u_l,\ u_j]=\delta_{ij}\ ^{*)}. \tag{8.44}$$

Доказательство этого тождества проводится непосредственно, однако оно несколько громоздко. Согласно равенствам (8.39) и (8.42) сумма (8.44) может быть записана следующим образом:

$$\sum_l^{2n}\{u_l,\ u_i\}\,[u_l,\ u_j]=\sum_l^{2n}\sum_k^{n}\sum_m^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}-\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial u_l}{\partial q_m}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}-\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}\right).$$

Перемножая написанные здесь скобки, мы получаем четыре суммы, первая из которых равна

$$\sum_{k,\,m}^{n}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\sum_l^{2n}\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}=\sum_{k,\,m}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\frac{\partial q_k}{\partial q_m}=$$
$$=\sum_{k,\,m}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\delta_{km}=\sum_k^{n}\frac{\partial u_j}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}. \tag{8.45}$$

---

*) Из равенства (8.42) видно, что скобки Пуассона являются как бы «обратными величинами» скобок Лагранжа. Равенство (8.44) придаёт этому утверждению более точный смысл. Если символ $\{u_l,\ u_i\}$ рассматривать как элемент L_{il} квадратной матрицы L, а символ $[u_l,\ u_j]$ — как элемент P_{lj} квадратной матрицы P (каждая из которых имеет порядок $2n$), то равенство (8.44) можно будет записать в виде

$$\mathsf{LP}=1$$

или

$$\mathsf{P}=\mathsf{L}^{-1}.$$

Точно такой же вид будет иметь и последняя из этих четырёх сумм, но вместо p_k в ней будет стоять q_k. Поэтому, складывая эти суммы, получаем

$$\sum_k^n \left(\frac{\partial u_j}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}+\frac{\partial u_j}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\right)=\frac{\partial u_j}{\partial u_i}. \tag{8.46}$$

Легко видеть, что каждая из двух оставшихся сумм равна нулю. Действительно, одна из них сводится к сумме членов, содержащих общий множитель

$$\sum_l \frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}=\frac{\partial q_k}{\partial p_m},$$

а вторая — к сумме, содержащей общий множитель

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_m}.$$

Но так как эти множители равны нулю, то и рассматриваемые суммы будут обращаться в нуль. Поэтому сумма (8.44) будет равна сумме (8.46), и, следовательно, можно написать

$$\sum_l^{2n} \{u_l,\ u_i\}\,[u_l,\ u_j]=\frac{\partial u_j}{\partial u_i}=\delta_{ij}.$$

Таким образом, рассматриваемая теорема доказана.

Заметим, что частная система переменных q, p была в наших рассуждениях совершенно несущественной и её роль могла бы играть любая система $2n$ независимых переменных Q, P. Поэтому равенство (8.44) сохраняется *при всех* преобразованиях переменных, даже если они не являются каноническими. Этим можно воспользоваться для того, чтобы вычислить некоторые скобки Пуассона, не делая оговорок относительно частного вида системы переменных.

Возьмём в качестве независимых функций u_l величины $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$ и положим $u_i=q_i$, а $u_j=p_j$. Так как переменные q_i и p_j различны, то равенство (8.44) принимает вид

$$\sum_l^n \{p_l,\ q_i\}\,[p_l,\ p_j]+\sum_l^n \{q_l,\ q_i\}\,[q_l,\ p_j]=0.$$

Но для всех *канонических* переменных

$$\{p_l,\ q_i\}=-\delta_{il} \text{ и } \{q_l,\ q_i\}=0,$$

поэтому будем иметь

$$[p_i,\ p_j]=0, \tag{8.47a}$$

что должно также иметь место для всех канонических переменных. Аналогичным образом получим

$$[q_i, q_j] = 0. \tag{8.47b}$$

Положим теперь $u_i = q_i$ и $u_j = q_j$. Тогда сумма (8.44) примет вид

$$\sum_l^n \{q_l, q_i\} [q_l, q_j] + \sum_l^n \{p_l, q_i\} [p_l, q_j] = \delta_{ij}.$$

Отсюда получаем

$$-\sum_l \delta_{il} [p_l, q_j] = \delta_{ij},$$

или

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}. \tag{8.47c}$$

Равенства (8.47) дают нам значения *фундаментальных скобок Пуассона* [аналогично равенствам (8.41) для скобок Лагранжа]. Эти равенства было бы проще доказывать с помощью непосредственного вычисления, подобно тому как это делалось для скобок Лагранжа. Но весь смысл приведённого доказательства состоит в том, что вычисление фундаментальных скобок Пуассона получается здесь *без ссылок на какую-либо частную систему канонических переменных*. В этом состоит преимущество рассмотренного доказательства, из которого следует, что скобки (8.47) являются каноническими *инвариантами*.

Равенства (8.47) позволяют показать, что не только фундаментальные, но и любые скобки Пуассона не зависят от системы применяющихся канонических переменных. Пусть F и G будут две произвольные функции канонических переменных. Тогда будем иметь

$$[F, G]_{q, p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right). \tag{8.48}$$

Рассматривая q_j и p_j как функции новых переменных Q_k и P_k, можно уравнение (8.48) записать в виде

$$[F, G]_{q, p} = \sum_{j, k} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial F}{\partial p_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right],$$

или после преобразования

$$[F, G]_{q, p} = \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} [F, Q_k]_{q, p} + \frac{\partial G}{\partial P_k} [F, P_k]_{q, p} \right). \tag{8.49}$$

Равенство (8.49) можно использовать для вычисления скобок Пуассона, содержащихся под знаком суммы. Если заменить в этом равенстве F на Q_k, а G на F, то оно примет вид

$$[Q_k,\ F]_{q,\,p}=\sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j}[Q_k,\ Q_j]+\sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j}[Q_k,\ P_j], \qquad (8.50)$$

причём мы опустили индексы у скобок Пуассона, стоящих в правой части этого равенства, так как они являются фундаментальными и, как было показано, являются каноническими инвариантами. В соответствии с формулами (8.47) равенство (8.50) принимает вид

$$[Q_k,\ F]_{q,\,p}=\sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j}\delta_{jk}$$

или

$$[F,\ Q_k]=-\frac{\partial F}{\partial P_k}. \qquad (8.51)$$

Полученное равенство является полезным соотношением, инвариантным относительно канонических преобразований. Аналогичным способом вычисляется другая скобка Пуассона. Для неё будем иметь

$$[P_k,\ F]_{q,\,p}=\sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j}[P_k,\ Q_j]+\sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j}[P_k,\ P_j],$$

откуда

$$[F,\ P_k]=\frac{\partial F}{\partial Q_k}. \qquad (8.52)$$

Подставляя (8.51) и (8.52) в (8.49), получаем

$$[F,\ G]_{q,\,p}=\sum_k\left(\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial P_k}-\frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial Q_k}\right)=[F,\ G]_{Q,\,P}.$$

Таким образом, инвариантность скобок Пуассона доказана. Поэтому в дальнейшем мы будем опускать индексы у этих скобок.

Остановимся теперь на некоторых простых свойствах скобок Пуассона, которыми нам придётся в дальнейшем пользоваться. Прежде всего заметим, что из определения (8.43) следует равенство

$$[u,\ u]=0. \qquad (8.53)$$

Далее, если c есть величина, не зависящая от p и q, то будем иметь

$$[u,\ c]=0. \qquad (8.54)$$

Наконец, из элементарных *правил дифференцирования* вытекают равенства:

$$[u+v,\ w]=[u,\ w]+[v,\ w] \tag{8.55}$$

и

$$[u,\ vw]=[u,\ v]\,w+v\,[u,\ w]\ ^{*}). \tag{8.56}$$

§ 8.5. Скобки Пуассона и уравнения движения. Если в равенствах (8.51) и (8.52) положить F равным гамильтониану H, то они примут вид:

$$[q_i,\ H]=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i \tag{8.57a}$$

и

$$[p_i,\ H]=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=\dot{p}_i. \tag{8.57b}$$

Эти равенства представляют канонические уравнения движения, написанные с помощью скобок Пуассона. Они являются частным случаем равенств, выражающих полную производную некоторой функции $u(q,\ p,\ t)$ по времени. Действительно, какова бы ни была эта функция, мы будем иметь

$$\frac{du}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Но с помощью уравнений гамильтона производные $\dot{q}_i$ и $\dot{p}_i$ можно выразить через гамильтониан; тогда получим

$$\frac{du}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}$$

или

$$\frac{du}{dt}=[u,\ H]+\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{8.58}$$

Равенства (8.57), очевидно, получаются из этого соотношения при $u=q_i$ и $u=p_i$. Кроме того, если положить здесь $u=H$, то будем иметь

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t},$$

что совпадает с равенством (7.19), полученным ранее.

---

*) Заметим, что в квантовой механике скобкам Пуассона соответствует произведение $\frac{2\pi i}{h}$ на *коммутатор* двух величин:

$$[u,\ v]\to\frac{2\pi i}{h}(uv-vu)$$

(h — постоянная Планка). Легко проверить, что соотношения (8.53)—(8.56) справедливы также и для коммутаторов.

Если u не содержит явно t (а мы ограничимся рассмотрением только таких случаев), то

$$\frac{du}{dt} = [u, H].$$

Поэтому, если $[u, H] = 0$, то и $u(q, p)$ будет величиной постоянной. Верно и обратное: если функция $u(q, p)$ сохраняет своё значение, то $[u, H] = 0$. Таким образом, мы получаем критерий для того, чтобы судить о том, является ли $u(q, p)$ константой движения.

Если $u(q, p) = \mathrm{const}$ и $v(q, p) = \mathrm{const}$ суть два первых интеграла движения, то можно с помощью так называемого *тождества Якоби* образовать ещё один такой интеграл. Согласно этому тождеству, если u, v и w — три любые функции q и p, то

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \tag{8.59}$$

Для доказательства этого тождества рассмотрим два первых слагаемых суммы (8.59), которые можно записать в виде

$$[u, [v, w]] - [v, [u, w]]. \tag{8.60}$$

Покажем, что написанное выражение не содержит вторых производных от w. Скобку Пуассона $[v, w]$ можно рассматривать как линейный дифференциальный оператор D_v, действующий на функцию w. Этот оператор можно записать в виде

$$D_v = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right)$$

или короче

$$D_v = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

С помощью таких операторов выражение (8.60) можно записать в виде

$$D_u D_v w - D_v D_u w = \sum_{i, k} \beta_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\alpha_k \frac{\partial w}{\partial \xi_k} \right) - \alpha_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\beta_i \frac{\partial w}{\partial \eta_i} \right).$$

Отсюда видно, что единственными членами этого выражения, содержащими вторые производные от w, являются следующие:

$$\sum_{i, k} \left(\beta_i \alpha_k \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_i \, \partial \xi_k} - \alpha_k \beta_i \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_k \, \partial \eta_i} \right).$$

Но эта сумма тождественно равна нулю, и, следовательно, разность (8.60) содержит только первые производные от w. Поэтому можно написать

$$[u, [v, w]] - [v, [u, w]] = \sum_k \left(A_k \frac{\partial w}{\partial p_k} + B_k \frac{\partial w}{\partial q_k} \right), \tag{8.61}$$

где A_k и B_k — выражения, содержащие u и v, но не содержащие w. Если положить $w=p_i$ (что не повлияет на A и B), то равенство (8.61) примет вид

$$[u,\ [v,\ p_i]]-[v,\ [u,\ p_i]]=A_i$$

или согласно (8.52)

$$\left[u,\ \frac{\partial v}{\partial q_i}\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial q_i},\ v\right]=A_i.$$

Поэтому окончательно будем иметь

$$A_i=\frac{\partial}{\partial q_i}[u,\ v].$$

Положив затем $w=q_i$, точно так же найдём

$$B_i=-\frac{\partial\,[u,\ v]}{\partial p_i},$$

и поэтому равенство (8.61) можно записать в виде

$$[u,\ [v,\ w]]+[v,\ [w,\ u]]=\sum_k\left(\frac{\partial\,[u,\ v]}{\partial q_k}\frac{\partial w}{\partial p_k}-\frac{\partial\,[u,\ v]}{\partial p_k}\frac{\partial w}{\partial q_k}\right)=[[u,\ v]\ w],$$

что эквивалентно тождеству Якоби в форме (8.59). Пусть теперь равенства $u(q,\ p)=\text{const}$ и $v(q,\ p)=\text{const}$ будут первыми интегралами движения. Положив в (8.59) $w=H$, мы увидим, что два первых члена этого тождества обратятся в нуль, и оно примет вид

$$[H,\ [u,\ v]]=0.$$

Следовательно, если $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ — два первых интеграла движения, то $[u,\ v]=\text{const}$ также будет первым интегралом движения*). Таким путём иногда удаётся получить целую серию первых интегралов. Однако часто они оказываются тривиальными функциями от уже полученных функций и поэтому не имеют значения.

§ 8.6. Бесконечно малые канонические преобразования. Константы движения и свойства симметрии. В связи с дальнейшим рассмотрением скобок Пуассона мы введём понятие *бесконечно малых канонических преобразований*. Как и в случае бесконечно малых поворотов, это будут такие преобразования, при которых переменные q, p изменяются на бесконечно малые величины. (Поэтому все расчёты мы будем производить лишь с точностью до членов первого порядка малости относительно этих величин.) Уравнения такого преобразования можно записать в виде:

$$Q_i=q_i+\delta q_i, \tag{8.62a}$$
$$P_i=p_i+\delta p_i, \tag{8.62b}$$

*) Этот результат иногда называют теоремой Пуассона.

где δq_i и δp_i — бесконечно малые приращения координат и импульсов (а *не виртуальные изменения* этих величин). Ясно, что производящая функция такого преобразования будет бесконечно мало отличаться от функции (8.18), осуществляющей тождественное преобразование. Поэтому производящую функцию рассматриваемого преобразования можно записать в виде

$$F_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G(q, P), \tag{8.63}$$

где ε — бесконечно малый параметр преобразования. Тогда согласно равенствам (8.11a) будем иметь

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

или

$$P_i - p_i = \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}. \tag{8.64a}$$

Аналогично из равенств (8.11b) получим

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}.$$

Второй член этой суммы является величиной первого порядка малости относительно ε. Но так как P_i бесконечно мало отличается от p_i, то с точностью до величин первого порядка малости можно $G(q, P)$ заменить на $G(q, p)$, а $\frac{\partial G}{\partial P_i}$ — на $\frac{\partial G}{\partial p_i}$. Поэтому последнее равенство можно записать в виде

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}. \tag{8.64b}$$

Хотя, строго говоря, термин «производящая функция» применим лишь к функции F, однако его обычно применяют и к функции G. Мы также будем этому следовать.

Интересным примером бесконечно малого канонического преобразования является такое преобразование, при котором $G = H(q, p)$, а ε есть бесконечно малый интервал времени dt. Тогда для δq_i и δp_i будем иметь:

$$\delta q_i = dt \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \, dt = dq_i, \tag{8.65a}$$

$$\delta p_i = -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \, dt = dp_i. \tag{8.65b}$$

Эти равенства показывают, что координаты и импульсы изменяются при этом таким образом, что вместо значений $q(t)$ и $p(t)$ они приобретают значения, равные $q(t+dt)$ и $p(t+dt)$. Следовательно, изменение состояния системы за время dt можно получить посредством бесконечно малого канонического преобразования, осуществляемого гамильтонианом H. Отсюда следует, что изменение состояния системы за время от t_0 до t можно получить с помощью последовательности бесконечно малых канонических преобразований. Но так как два последовательных канонических преобразования эквивалентны некоторому одному каноническому преобразованию, то переход от $q(t_0)$, $p(t_0)$ к $q(t)$, $p(t)$ можно получить с помощью канонического преобразования, зависящего от t. Таким образом, движение механической системы можно рассматривать как непрерывно совершающееся каноническое преобразование, производящей функцией которого в каждый момент времени является гамильтониан.

Ясно, что существует и обратное каноническое преобразование, превращающее координаты $q(t)$ и импульсы $p(t)$ в постоянные величины $q(t_0)$ и $p(t_0)$. Получение такого преобразования, очевидно, эквивалентно полному решению задачи о движении данной системы. В начале этой главы указывалось, что решение задачи о движении системы можно свести к нахождению такого канонического преобразования, при котором все импульсы получаются постоянными. Сейчас мы видим, что, кроме того, возможно такое каноническое преобразование, при котором постоянными величинами становятся не только импульсы, но и координаты. В следующей главе мы рассмотрим каждую из этих возможностей и покажем, как таким путём можно получить формальное решение каждой механической задачи.

Важную связь между скобками Пуассона и бесконечно малыми каноническими преобразованиями можно получить, рассматривая изменение некоторой функции $u(q, p)$ в результате такого преобразования. Здесь необходимо объяснить, что́ мы понимаем под словом «изменение» функции. Раньше, когда мы «преобразовывали» величину $u(q, p)$ к новым переменным, мы вместо q и p подставляли в u выражения $q(Q, P)$ и $p(Q, P)$. Таким путём мы получали зависимость u от новых переменных. При этом *функциональная* зависимость u от Q и P оказывается в общем случае не такой, как зависимость u от q и p. Однако численное значение u, соответствующее данному состоянию системы, при этом не изменяется, так как $u(q, p)$ есть функция точек фазового пространства и её значения, конечно, не зависят от вида координат, которыми мы задаём эти точки. Теперь же мы будем рассматривать «изменение» функции u в другом смысле этого слова. Мы будем понимать под ним численное изменение величины u в результате замены аргумента q на Q и аргумента p на P. Функциональная зависимость u от старых и новых переменных будет при этом одной и той же, но точка фазового пространства, в которой мы вычисляем u, будет при этом изменяться. Рассмотрим, например, бесконечно малое преобразование (8.65). В этом случае мы, подставляя в функцию $u(q, p)$ переменные Q и P вместо q и p, переходим от значения $u(t)$ к значению $u(t+dt)$.

Таким образом, мы под изменением функции u в результате бесконечно малого канонического преобразования будем понимать

$$\delta u = u(q_i + \delta q_i, \ p_i + \delta p_i) - u(q_i, \ p_i).$$

Раскладывая эту разность в ряд Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка малости, мы будем иметь

$$\delta u = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \delta p_i \right).$$

Подставляя сюда δq_i и δp_i из равенств (8.64), получаем

$$\delta u = \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

или окончательно:

$$\delta u = \varepsilon [u, \ G]. \tag{8.66}$$

Положив здесь $u = H$, мы получим следующую формулу для изменения гамильтониана при бесконечно малом каноническом преобразовании:

$$\delta H = \varepsilon [H, \ G]. \tag{8.67}$$

Мы уже говорили, что если функция $G(q, \ p)$ есть первый интеграл уравнений движения, то

$$[H, \ G] = 0.$$

Но из равенства (8.67) можно заключить, что бесконечно малое каноническое преобразование, осуществляемое такой производящей функцией, не изменяет величины гамильтониана H. Поэтому можно высказать следующее утверждение:

Все первые интегралы уравнений движения являются производящими функциями тех бесконечно малых канонических преобразований, при которых не изменяется гамильтониан.

Что касается преобразований, не изменяющих величины H, то их можно найти, если обратиться к свойствам симметрии системы, так как если физическая система симметрична относительно определённых изменений её конфигурации, то гамильтониан её должен при соответствующем преобразовании оставаться неизменным. Поэтому все функции, остающиеся в процессе движения постоянными (все первые интегралы уравнений движения), можно получить путём исследования свойств симметрии гамильтониана, что равносильно полному решению задачи о движении системы. С этой связью между константами движения и свойствами симметрии мы уже встречались в § 2.6, когда говорили о сохранении обобщённых импульсов. Однако результат, полученный нами теперь, является более изящным и более полным, так как сейчас речь идёт о всех константах движения, а не только об обобщённых импульсах.

Теоремы о сохранении, полученные нами ранее, будут теперь частными случаями того общего положения, которое мы сейчас высказали. Пусть, например, координата q_i является циклической. Тогда гамильтониан её не будет зависеть от q_i и, следовательно, не будет изменяться при бесконечно малом каноническом преобразовании, изменяющем только q_i. Уравнения такого преобразования будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \delta q_j &= \varepsilon\delta_{ij}, \\ \delta p_j &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.68}$$

где ε — бесконечно малое изменение координаты q_i. Но из формул (8.64) видно, что единственной функцией G, осуществляющей такое преобразование, является функция

$$G = p_i, \tag{8.69}$$

представляющая обобщённый импульс, соответствующий координате q_i. Таким образом, мы получили известную теорему о сохранении обобщённого импульса, согласно которой импульс, соответствующий циклической координате, есть величина постоянная.

В качестве ещё одной иллюстрации рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование, соответствующее повороту системы в целом на угол $d\theta$. Физический смысл производящей функции этого преобразования, очевидно, не зависит от выбора канонических координат, и поэтому мы будем пользоваться декартовыми координатами точек системы. Кроме того, не уменьшая общности, можно считать, что рассматриваемый поворот совершается вокруг оси z. Тогда координаты каждой точки будут изменяться так, как будто система остаётся в покое, а координатные оси поворачиваются на угол $-d\theta$. Поэтому с точностью до величин первого порядка относительно $d\theta$ мы будем иметь следующие выражения для новых координат:

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - y_i\,d\theta, \\ Y_i &= y_i + x_i\,d\theta, \\ Z_i &= z_i \end{aligned}$$

[см. формулы (4.90)]. Отсюда видно, что бесконечно малые изменения координат будут равны:

$$\delta x_i = -y_i\,d\theta, \quad \delta y_i = x_i\,d\theta, \quad \delta z_i = 0. \tag{8.70}$$

Аналогичные соотношения мы, очевидно, будем иметь и для компонент импульсов p_i, так как при повороте системы они преобразуются так же, как и координаты. Сравнивая теперь равенства (8.70) с равенствами (8.64), мы видим, что производящей функцией данного преобразования является функция

$$G = \sum_i (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}), \tag{8.71}$$

а роль бесконечно малого параметра ε играет угол $d\theta$. Убедиться в этом можно непосредственной проверкой, которая показывает, что при этом имеют место равенства:

$$\delta x_i = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} = -y_i\, d\theta, \quad \delta p_{ix} = -d\theta \frac{\partial G}{\partial x_i} = -p_{iy}\, d\theta,$$
$$\delta y_i = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{iy}} = x_i\, d\theta, \quad \delta p_{iy} = -d\theta \frac{\partial G}{\partial y_i} = p_{ix}\, d\theta,$$

совпадающие с равенствами (8.70). Производящая функция (8.71) имеет простой физический смысл: она представляет собой z-компоненту кинетического момента системы

$$G = L_z.$$

Так как ось z может иметь произвольное направление, то мы приходим к выводу, что производящая функция, осуществляющая любой бесконечно малый поворот, имеет вид

$$G = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{8.72}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор вдоль оси этого поворота. Таким образом, кинетический момент является производящей функцией вращательного движения системы (подобно тому, как гамильтониан является производящей функцией её фактического движения).

Этот результат следует, конечно, и непосредственно из равенства (8.69). Если в качестве одной из канонических координат взять угол, характеризующий поворот системы в целом, то соответствующий канонический импульс будет, как мы знаем, составляющей кинетического момента вдоль оси вращения (см. § 2.6). Таким образом, равенство (8.72) является частным случаем равенства (8.69).

§ 8.7. Скобки Пуассона и кинетический момент. Отождествление кинетического момента с производящей функцией вращения приводит к ряду интересных и важных соотношений, содержащих скобки Пуассона. Согласно равенству (8.66) изменение векторной функции $\boldsymbol{F}(q, p)$ при бесконечно малом повороте системы равно

$$\delta \boldsymbol{F} = d\theta\, [\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}]. \tag{8.73}$$

Следует не забывать о том смысле, который мы здесь вкладываем в слова «изменение функции». Векторное равенство (8.73) можно, конечно, записать в виде трёх скалярных равенств. Пусть, например, $A(q, p)$ будет x-компонентой $\boldsymbol{F}$. Тогда из равенства (8.73) получим

$$\delta A = A(Q, P) - A(q, p) = d\theta\, [A, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}], \tag{8.74}$$

и аналогично, для составляющих $\boldsymbol{F}$ по осям y и z, которые мы будем обозначать через $B(q, p)$ и $C(q, p)$. В предыдущем параграфе мы видели, что преобразование скалярной функции $u(q, p)$ при переходе к другой системе переменных носит совершенно иной характер, так как значение функции остаётся при этом тем же самым, но функциональная зависимость u от аргументов, вообще говоря, меняется. Рассмотрим теперь не скалярную функцию, а векторную и посмотрим, как она ведёт себя при преобразовании, соответствующем вращению. Здесь дело будет обстоять сложнее, так как функциональная зависимость каждой составляющей этой функции будет изменяться по двум причинам: вследствие преобразования аргументов и вследствие изменения самих составляющих в связи с поворотом вектора. Рассмотрим, например, бесконечно малый поворот вокруг оси z. В этом случае старые и новые составляющие вектора $\boldsymbol{F}$ будут связаны друг с другом соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} A(q, p) &= A'(Q, P) + B'(Q, P)\,d\theta, \\ B(q, p) &= B'(Q, P) - A'(Q, P)\,d\theta, \\ C(q, p) &= C'(Q, P), \end{aligned}\right\} \tag{8.75}$$

где $A'(Q, P)$, $B'(Q, P)$, $C'(Q, P)$ — новые функции новых аргументов.

Теперь нетрудно будет установить, какова связь между обычным преобразованием ~~вектора~~ при его повороте и «изменением», выражаемым равенством (8.74). Предположим, что векторная функция $\boldsymbol{F}$ такова, что функциональная зависимость её старых и новых составляющих от соответствующих аргументов оказывается одинаковой, т. е. функция $A'(Q, P)$ такова же, как функция $A(Q, P)$, и аналогично для других составляющих. Примером такой функции $\boldsymbol{F}$ может служить вектор кинетического момента системы, так как в этом случае

$$L_x = \sum_i (y_i p_{iz} - z_i p_{iy}),$$

а после поворота

$$L_X = \sum_i (Y_i P_{iZ} - Z P_{iY}).$$

Следовательно, L_X таким же образом зависит от Q и P, как L_x от q и p. Для векторных функций, обладающих этим свойством, *и только для них*, уравнения (8.75) принимают вид:

$$\begin{aligned} A(q, p) &= A(Q, P) + B(Q, P)\,d\theta, \\ B(q, p) &= B(Q, P) - A(Q, P)\,d\theta, \\ C(q, p) &= C(Q, P). \end{aligned}$$

Но с точностью до величин первого порядка малости член $B(Q, P)\,d\theta$ можно заменить членом $B(q, p)\,d\theta$. Поэтому изменения [в смысле (8.74)] составляющих вектора $\boldsymbol{F}$ при повороте вокруг оси z на угол $d\theta$ будут равны:

$$A(Q,\ P)-A(q,\ p)=\delta A=-B\,d\theta,$$
$$B(Q,\ P)-B(q,\ p)=\delta B=A\,d\theta$$

и

$$C(Q,\ P)-C(q,\ p)=\delta C=0.$$

Эти равенства совпадают с теми, которые определяют изменения составляющих неподвижного вектора при повороте координатных осей на угол $-d\theta$ вокруг оси z [уравнение (4.94)]. В данном случае будем иметь

$$d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{k}\,d\theta\times\boldsymbol{F}=\delta\boldsymbol{F}.$$

Поэтому изменение $\boldsymbol{F}$ при бесконечно малом повороте вокруг произвольной оси будет равно

$$\delta\boldsymbol{F}=\boldsymbol{n}\,d\theta\times\boldsymbol{F}. \tag{8.76}$$

Отсюда согласно (8.73) получаем

$$[\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}. \tag{8.77}$$

Следует заметить, что хотя равенство (8.77) справедливо лишь для ограниченного класса векторных функций, однако большинство векторных величин, встречающихся в задачах механики, принадлежит к этому классу. К их числу принадлежит, например, любая функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p})$, которая не содержит фиксированного вектора, не связанного с системой. В обозначениях диадного исчисления равенство (8.77) может быть представлено в виде

$$[\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{L}]=\mathbf{1}\times\boldsymbol{F}, \tag{8.78}$$

где $\mathbf{1}$ — единичная диада $\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$. [Равенство (8.77) легко получается из равенства (8.78) посредством скалярного умножения обеих частей его на $\boldsymbol{n}$.] Хорошо известный частный случай рассматриваемого соотношения получается при $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{L}$. В этом случае будем иметь

$$[\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{L}$$

или

$$[\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{L}]=\mathbf{1}\times\boldsymbol{L}. \tag{8.79}$$

Из равенства (8.79), в частности, следует, что

$$[L_x,\ L_y]=(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{L})_x=L_z.$$

Поэтому для скалярных составляющих правой части (8.79) будем иметь

$$[L_i,\ L_j]=L_k \qquad (i,\ j,\ k\text{ — в циклическом порядке}). \tag{8.80}$$

Из равенств (8.79) и (8.80) можно получить ряд интересных выводов. Пусть, например, $L_x(q,\ p)$ и $L_y(q,\ p)$ будут первыми интегралами уравнений движения. Тогда скобки $[L_x, H]$ и $[L_y, H]$ будут равны нулю, и согласно теореме Пуассона $[L_x, L_y] = L_z$ будет величиной постоянной. Следовательно, если две составляющие кинетического момента остаются во время движения неизменными (при любых начальных условиях), то полный вектор кинетического момента также будет неизменным.

Более важное значение имеет соотношение

$$[L^2, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}] = 0, \tag{8.81}$$

которое легко доказать, если учесть, что левая часть его может быть записана в виде

$$[\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}, \ \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}] = 2\boldsymbol{L} \cdot [\boldsymbol{L}, \ \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}].$$

Согласно (8.79) выражение (8.81) примет вид

$$2\boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{L}) = 0.$$

Применяя то же доказательство к любому вектору, удовлетворяющему равенству (8.77), мы получим для него аналогичное соотношение

$$[F^2, \ \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}] = 0. \tag{8.82}$$

Вспомним теперь, что если p_i и p_j — два любых канонических импульса, то согласно (8.41b) скобка $[p_i, p_j]$ должна быть тождественно равна нулю. Но согласно (8.80) скобки Пуассона $[L_i, L_j]$ при $j \neq i$ будут отличны от нуля. Следовательно, если одна из составляющих кинетического момента вдоль неподвижных осей выбрана в качестве канонического импульса, то другая составляющая *не может* одновременно с ней быть каноническим импульсом. В противоположность этому из (8.81) видно, что величина вектора $\boldsymbol{L}$ и любая её компонента могут одновременно быть каноническими импульсами *).

---

*) Мы уже отмечали, что в квантовой механике аналогом скобки Пуассона является квантовомеханический коммутатор. Поэтому многие положения квантовой механики можно формально получить из соответствующих положений классической механики, если символ [ ] читать как «коммутатор» (не считая постоянного множителя). Это относится и к результатам данного параграфа, которые имеют близкие квантовые аналогии. Например, утверждению, что две составляющие $\boldsymbol{L}$ не могут одновременно быть каноническими импульсами, соответствует известное положение о том, что L_i и L_j не могут одновременно быть собственными значениями. Однако L^2 и L_i могут быть квантованы одновременно. Большей частью эти соотношения гораздо лучше известны в их квантовой форме, чем в форме классических теорем. Так, например, одна из самых ранних ссылок на скобки Пуассона в связи с кинетическим моментом появилась лишь в 1930 г. (в монографии Борна и Иордана «Элементарная квантовая механика»). Точно так же равенство (8.78), определяющее изменение вектор-функции при вращении, уже давно применялось в квантовой механике (см. Condon and Shortley, The Theory of Atomic Spectra, стр. 59), но лишь в последнее время было получено в классической механике (насколько известно автору, это было сделано недавно профессором Швингером).

§ 8.8. Теорема Лиувилля. В качестве последнего примера применения скобок Пуассона остановимся коротко на так называемой теореме Лиувилля, являющейся основной теоремой статистической механики.

Хотя законы классической механики позволяют полностью определить движение системы по известным начальным условиям, однако для сложных систем это часто оказывается практически невозможным. Было бы, например, совершенно безнадёжным пытаться вычислить движение каждой молекулы одного моля газа, так как число этих молекул превышает 10^{23}. Кроме того, начальные условия такой системы нам никогда не бывают вполне известны. Мы можем, например, установить, что при $t=t_0$ энергия этой массы газа имеет определённое значение, но каковы начальные координаты и скорости каждой молекулы, мы, конечно, сказать не можем. Поэтому статистическая механика не ищет точного решения задачи о движении подобных систем, а ставит перед собой другую цель. Она состоит в том, чтобы дать метод вычисления некоторых средних величин, характеризующих движение большого числа одинаковых систем. Эти величины получаются путём вычисления средних значений по всем системам *ансамбля*. Каждый член такого ансамбля может, конечно, характеризоваться любыми начальными условиями, что согласуется с той неполной информацией, которую мы имеем об этом ансамбле.

Так как каждая такая система изображается некоторой точкой в фазовом пространстве, то ансамблю этих систем в фазовом пространстве будет соответствовать некоторое множество точек. В теореме Лиувилля рассматривается плотность этого множества в какой-либо из его точек и доказывается, что при движении систем, составляющих ансамбль, она не изменяется.

Будем обозначать эту плотность через D. Она будет изменяться со временем вследствие двух причин. Дело в том, что D есть плотность того множества изображающих точек, которые лежат в окрестности точки, изображающей данную систему ансамбля. Поэтому здесь будет *неявная* зависимость D от t, связанная с тем, что изображающая точка движется в фазовом пространстве и поэтому координаты её (q_i, p_i) изменяются со временем. Кроме того, может иметь место и явная зависимость D от t, так как плотность может изменяться даже в том случае, когда она вычисляется для данной фиксированной точки фазового пространства. Поэтому полную производную D по t, учитывающую изменение D вследствие обоих факторов, можно записать согласно формуле (8.58). Таким образом, будем иметь

$$\frac{dD}{dt}=[D,\ H]+\frac{\partial D}{\partial t}, \tag{8.83}$$

где первое слагаемое учитывает неявную зависимость D от t, а второе — явную зависимость.

Рассмотрим теперь множество точек, изображающих данный ансамбль при $t=0$, и выделим в фазовом пространстве бесконечно малый объём dV, ограничивающий некоторую систему таких точек. С течением времени эти точки будут изменять своё положение в фазовом пространстве, и рассматриваемый объём примет другую форму (рис. 62). Ясно, что число изображающих точек внутри этого объёма будет всё время постоянным, так как ни одна из них никогда не сможет выйти из него наружу. В самом деле, если бы какая-нибудь из них прошла через границу этого объёма, то она заняла бы то положение, которое имеет в этот момент какая-то изображающая точка на его поверхности. Но так как движение каждой изображающей точки однозначно определяется её положением в фазовом пространстве в заданный момент времени, то это означало бы, что две указанных точки вышли из этого объёма вместе. Следовательно, ни одна из изображающих точек внутри этого объёма не сможет его покинуть, точно так же, как ни одна из внешних изображающих точек никогда не сможет проникнуть в него.

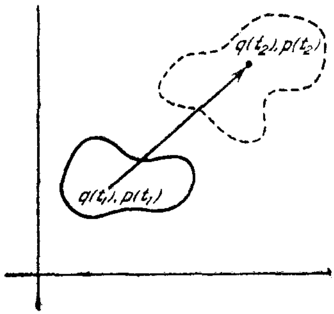

Рис. 62. Движение объёма в фазовом пространстве.

Ранее было показано, что движение каждой изображающей точки можно рассматривать как некоторое каноническое преобразование её координат, непрерывно совершающееся в течение всего времени движения. Следовательно, изменения во времени рассматриваемого объёма dV также можно получить с помощью некоторого канонического преобразования. Но мы знаем, что объём любой области фазового пространства является одним из интегральных инвариантов Пуанкаре и, следовательно, не меняется при канонических преобразованиях. Поэтому объём dV не будет изменяться со временем.

Таким образом, и объём dV и число содержащихся в нём точек остаются постоянными. Следовательно, интересующая нас плотность

$$D=\frac{dN}{dV}$$

также должна быть постоянной, что можно записать в виде равенства

$$\frac{dD}{dt}=0.$$

Полученный результат и составляет содержание теоремы Лиувилля. Согласно (8.83) её можно записать в виде

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-[D,\ H]. \tag{8.84}$$

Если ансамбль систем находится в состоянии статистического равновесия, то число систем, находящихся в данном состоянии, не должно изменяться со временем, и, следовательно, плотность D в данной точке фазового пространства должна быть постоянной. Изменение D в данной точке пространства определяется частной производной $\frac{\partial D}{\partial t}$. Поэтому условием статистического равновесия является равенство

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0,$$

что согласно (8.84) эквивалентно равенству

$$[D,\ H] = 0.$$

Следовательно, выбирая плотность D как функцию одного из интегралов движения, мы можем гарантировать статистическое равновесие, так как скобка Пуассона $[D,\ H]$ будет тогда обращаться в нуль. Поэтому для консервативных систем плотность D может быть любой функцией энергии, так как при этом обязательно будет выполняться условие равновесия. Выбор этой функции определяет характеристики рассматриваемого ансамбля систем. В случае, например, известного *микроканонического* ансамбля плотность D постоянна для всех систем, имеющих заданную энергию, и равна нулю для других систем.

Высказанные выше соображения иллюстрируют эффективность применения скобок Пуассона в статистической механике. Дальнейшее изучение этого вопроса, однако, увело бы нас слишком далеко от основной темы, и поэтому мы ограничимся тем, что было здесь изложено.

Задачи

1. Покажите непосредственно, что преобразование

$$Q = \log\left(\frac{1}{q}\sin p\right), \quad P = q \operatorname{ctg} p,$$

является каноническим.

2. При выводе уравнений преобразования, осуществляемого производящими функциями F_2, F_3 или F_4, мы пользовались преобразованием Лежандра лишь для установления связи между производящими функциями. Показать, что описанное в главе 7 преобразование Лежандра позволяет получить уравнения (8.11), (8.14) и (8.17) непосредственно из уравнений (8.9).

3. Уравнения преобразования имеют вид:

$$Q = \log\left(1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p\right),$$
$$P = 2\left(1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p\right) q^{\frac{1}{2}}\sin p.$$

а) Исходя непосредственно из этих уравнений, покажите, что если q и p являются каноническими переменными, то переменные Q и P также будут каноническими.

b) Покажите, что производящей функцией этого преобразования является функция

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \operatorname{tg} p.$$

4. При каких значениях α и β уравнения

$$Q = q^\alpha \cos \beta p, \quad P = q^\alpha \sin \beta p$$

являются уравнениями канонического преобразования? Какова в этом случае производящая функция F_3?

5. Точка массы m движется в поле, потенциал которого зависит только от z и от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Найдите производящую функцию, осуществляющую переход к системе координат, равномерно вращающейся вокруг оси z со скоростью ω. Каков физический смысл нового гамильтониана? Сравните полученный результат с результатом задачи 4 главы 7. Выведите новые канонические уравнения движения и объясните физический смысл каждого члена этих уравнений.

6. Показать, что если t рассматривать как каноническую переменную, то в случае, когда преобразование не влияет на масштаб времени, уравнения преобразования сводятся к обычным уравнениям (8.11).

7. Показать, что если канонические переменные не являются независимыми, а связаны дополнительными условиями

$$\psi_k (q_i, p_i, t) = 0,$$

то канонические уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

где λ_k — неопределённые множители Лагранжа.

Как раз такой случай имеет место, когда t рассматривается как каноническая переменная в соответствующих уравнениях Гамильтона, так как между p_{n+1} и другими каноническими переменными в этом случае существует соотношение

$$H(q_1, \ldots, q_{n+1}, p_1, \ldots, p_n) + p_{n+1} = 0.$$

Модифицированный таким путём принцип Гамильтона показывает, что «гамильтониан» рассматриваемых $2n+2$ переменных всегда равен нулю (см. задачу 6 гл. 7). Показать, что получающиеся $2n+2$ уравнений Гамильтона можно свести при этом к $2n$ обычным уравнениям Гамильтона плюс уравнение (7.19) и уравнение

$$\lambda = \frac{dt}{d\theta}.$$

(Заметим, что хотя здесь имеется сходство с ковариантной релятивистской теорией уравнений Гамильтона, эти результаты получены нами, не выходя за пределы нерелятивистской механики.)

8. Показать с помощью непосредственной подстановки в уравнение (8.8), что функция $\sum_i q_i Q_i$ осуществляет преобразование, меняющее местами координаты и импульсы. Показать, что функция $F_4 = \sum_i p_i P_i$ также осуществляет подобное преобразование, а преобразование, осуществляемое функцией $F_3 = -\sum_i Q_i p_i$, является тождественным.

9. Показать, что элементы функционального детерминанта

$$D = \frac{\partial (Q_k, P_k)}{\partial (q_i, p_i)}$$

можно преобразовать так, что элементами детерминанта D^2 будут фундаментальные скобки Лагранжа. Доказать таким путём, что $D^2 = 1$. (Из интегрального инварианта J можно видеть, что D всегда равно $+1$.)

10. Пользуясь равенствами (8.9), (8.11), (8.14), (8.17), докажите, что имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

Покажите, что

$$[q_i, p_j] = \{q_j, p_i\}.$$

(Это можно использовать для независимого доказательства инвариантности фундаментальных скобок Пуассона.) Показать также, что детерминант обратного преобразования $(Q, P) \to (q, p)$ равен D, т. е. что $D^{-1} = D$. (Этот результат представляет новое доказательство равенства $D^2 = 1$.)

11. Говорят, что класс некоторых операций является *группой*, если выполняются следующие условия: 1) он содержит тождественный оператор; 2) наряду с каждым оператором в него входит и оператор, обратный данному, и 3) произведение двух любых операторов из этого класса также входит в этот класс. Показать, что канонические преобразования системы с n степенями свободы образуют группу.

12. В этой главе было показано, что инвариантность фундаментальных скобок Пуассона представляет необходимое условие того, что преобразование является каноническим. Можно, однако, показать, что это условие является и достаточным.

Рассмотрите простейший случай, когда уравнения преобразования не содержат явно t, и покажите, что если выполнено это условие и если переменные q и p являются каноническими, то переменные Q и P также будут удовлетворять некоторым уравнениям канонического типа. Кроме того, покажите, что при этом

$$[Q_i, Q_j]_{q, p} = 0 = [P_i, P_j]_{q, p}, \quad [Q_i, P_j]_{q, p} = \delta_{ij}.$$

(Наиболее простой способ доказательства состоит в том, чтобы выразить $\dfrac{dQ}{dt}$ и $\dfrac{dP}{dt}$ через старые канонические переменные.)

13. Покажите, что если два первых интеграла уравнений движения содержат явно t, то составленная из них скобка Пуассона всё равно является первым интегралом этих уравнений.

14. a) Покажите, что если гамильтониан H и функция F являются первыми интегралами уравнений движения, то $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ также будет первым интегралом.

b) В качестве примера рассмотрите равномерное движение свободной точки массы m. Гамильтониан этой системы является, конечно, первым интегралом; кроме того, здесь имеется интеграл

$$F = x - \frac{pt}{m}.$$

Покажите путём непосредственного вычисления, что интеграл $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ совпадает здесь с $[H, F]$.

15. Рассмотрите задачу о сферическом маятнике, пользуясь уравнениями Гамильтона и выбирая в качестве переменных q_i сферические полярные координаты. С помощью непосредственного вычисления найдите в этих канонических переменных скобки Пуассона

$$[L_x, L_y], \quad [L_y, L_z], \quad [L_z, L_x]$$

и покажите, что они имеют значения, определяемые равенством (8.80). Ответьте на вопрос, почему p_θ и p_ψ можно принять здесь за канонические импульсы, несмотря на то, что они являются взаимно перпендикулярными составляющими кинетического момента.

Рекомендуемая литература

L. Nordheim und E. Fues, Die Hamilton — Jacobische Theorie der Dynamik, т. V Handbuch der Physik.

Эта статья имеет самое близкое отношение к вопросам, рассмотренным в настоящей главе, так как она посвящена главным образом каноническим преобразованиям и скобкам Пуассона. Она, несомненно, может служить одним из лучших пособий по этим вопросам. Несмотря на своё название, она, в сущности, содержит теорию Гамильтона—Якоби (см. гл. 9 нашей книги) лишь в последних параграфах.

E. T. Whittaker, Analytical Dynamics.

В главах IX и X этой книги содержится многое из того, что имеется у Нордхейма и Фюза. Эти вопросы рассматриваются Уиттекером главным образом с математической точки зрения. (Интересно провести сравнение этих двух способов изложения.) В книге рассматриваются только такие преобразования, для которых производящая функция не содержит явно времени.

M. Born, The Mechanics of the Atom.

Канонические преобразования классической механики играли всегда важную роль также и в квантовой механике. Это относится и к более старой квантовой теории, принадлежащей Борну, и к современной квантовой механике. Поэтому работы, посвящённые той или другой форме квантовой механики, часто содержат подробное изложение нужных разделов классической механики. Одной из лучших книг такого рода является рекомендуемая книга Борна (1924), написанная им до появления волновой механики. В первой главе этой книги даётся сжатое изложение теории канонических преобразований и приводится много интересных физических примеров. Скобки Пуассона в этой книге не рассматриваются, так как в современной физике интерес к ним появился только с возникновением в квантовой механике теории Гейзенберга и Дирака.

M. Born und P. Jordan, Elementare Quantenmechanik.

В предисловии к своей книге, выпущенной в 1924 г., Борн указывал на недостатки существовавшей тогда квантовой теории и отмечал, что имеющиеся трудности, возможно, будут преодолены только после радикальной ревизии основных принципов квантовой механики. (Положение, подобное тому, которое сейчас имеется в теории ядерных сил.) Предсказание Борна вскоре сбылось, и в 1929 г. он совместно с Иорданом выпустил рекомендуемую здесь книгу. Как и в предыдущей работе, здесь некоторое место отводится классической механике, в частности рассматриваются скобки Пуассона, приводящие к весьма интересным результатам. Этот вопрос изложен в Приложении III, где рассматривается также связь скобок Пуассона с кинетическим моментом.

A. Sommerfeld, Atomic Structure and Spectral Lines.

Этот классический трактат по старой квантовой механике содержит много интересного материала по уравнениям Гамильтона и каноническим преобразованиям. Эти вопросы изложены автором в различных местах главы об атоме водорода и в некоторых приложениях.

R. C. Tolman, The Principles of Statistical Mechanics.

Эту книгу можно назвать энциклопедией теоретической физики. Глава II этого большого сочинения содержит краткое, но ясное изложение теории канонических преобразований, а также других аналогичных вопросов классической механики, в частности рассматриваются скобки Пуассона. § 19 главы III посвящён теореме Луивилля.

C. Carathéodory, Variationsrechnung.

У нас не было возможности изложить в этой главе канонические преобразования со всеми математическими подробностями, которые особенно важны в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Интересующиеся читатели могут ознакомиться с ними в рекомендуемой книге Каратеодори, являющейся прекрасным введением в круг этих вопросов и содержащей обильный материал по каноническим и контактным преобразованиям, а также по различного рода скобкам. Несколько более короткое изложение этих вопросов можно найти в главе о вариационном исчислении, содержащейся в т. 1 книги: Frank und von Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.

P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics.

Именно на эту книгу обычно ссылаются, когда говорят о приложении скобок Пуассона к квантовой механике. К сожалению, она приобрела репутацию книги, трудной для понимания, хотя этого нельзя сказать о её последних изданиях. Поэтому читатели, немного знакомые с физическими основами квантовой механики, вполне могут ею пользоваться. Вопросы, имеющие отношение к материалу этой главы, изложены в §§ 25—30 этой книги.

ГЛАВА 9

МЕТОД ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

Говоря о применении канонических преобразований к решению задач механики, мы указывали на два метода. Один из них относится к тому случаю, когда гамильтониан системы остаётся постоянным. В этом случае существует такое преобразование, при котором новые канонические координаты являются циклическими, и тогда интегрирование новых уравнений движения становится тривиальным. Другой метод состоит в отыскании такого канонического преобразования, которое осуществляет переход от координат $q(t)$ и импульсов $p(t)$ к начальным координатам $q(t_0)$ и начальным импульсам $p(t_0)$. Уравнения преобразования, связывающие старые и новые канонические переменные, будут при этом иметь вид:

$$q = q(q_0, p_0, t),$$
$$p = p(q_0\ p_0, t),$$

т. е. будут давать полное решение задачи, так как координаты и импульсы даются ими как функции их начальных значений и времени. Этот метод является более общим, так как он применим (по крайней мере принципиально) и тогда, когда гамильтониан содержит время t. Поэтому мы начнём с рассмотрения вопроса о том, как получить такое преобразование.

§ 9.1. Уравнение Гамильтона—Якоби. Для того чтобы иметь уверенность в том, что новые переменные являются величинами постоянными, достаточно потребовать, чтобы преобразованный гамильтониан K был тождественно равен нулю, так как тогда новые уравнения движения будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial P_i} &= \dot{Q}_i = 0, \\ -\frac{\partial K}{\partial Q_i} &= \dot{P}_i = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

Но так как K и H связаны соотношением

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t},$$

то для выполнения равенства $K=0$ производящая функция F должна удовлетворять уравнению

$$H(q, p, t)+\frac{\partial F}{\partial t}=0, \tag{9.2}$$

где $H(q, p, t)$ — старый гамильтониан. Функцию F удобно считать зависящей от старых координат q_i, от новых (постоянных) импульсов P_i и от времени t. Пользуясь обозначениями предыдущей главы, мы будем записывать её в виде $F_2(q, P, t)$. Чтобы выразить фигурирующий в (9.2) гамильтониан через те же переменные, можно воспользоваться уравнениями (8.11a), согласно которым

$$p_i=\frac{\partial F_2}{\partial q_i}.$$

Поэтому уравнение (9.2) можно записать в виде

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right)+\frac{\partial F_2}{\partial t}=0. \tag{9.3}$$

Полученное уравнение носит название *уравнения Гамильтона—Якоби*. Оно является дифференциальным уравнением в частных производных и определяет зависимость искомой производящей функции от $q_1, \ldots, q_n, t$. Решение уравнения (9.3) обычно обозначают через S и называют *главной функцией Гамильтона*.

Конечно, решая уравнение (9.3), мы находим зависимость S только от старых координат и времени и ничего не можем сказать о характере зависимости S от новых импульсов, о которых знаем пока только то, что они должны быть постоянными. Мы увидим, однако, что характер получающегося решения показывает, как получить новые импульсы P_i.

Уравнение (9.3) является дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных. Так как оно содержит $n+1$ независимых переменных, то полный интеграл его должен содержать $n+1$ независимых постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ *). Следует, однако, заметить, что сама функция S в это уравнение не входит, а входят лишь её производные по q или по t. Поэтому, если S есть некоторое решение уравнения (9.3), то решением этого уравнения будет

---

*) Полным интегралом уравнения

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0$$

называют функцию

$$z=z(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n),$$

удовлетворяющую этому уравнению и содержащую столько независимых постоянных a_i, сколько в этом уравнении независимых переменных x_i (см., например, Н. Н. Бухгольц, Основной курс теоретической механики, ч. II, ОНТИ НКТП, 1937). (*Прим. перев.*)

и $S+\alpha$, где α — любая постоянная (так как аддитивная постоянная не изменяет значений частных производных). Следовательно, одна из $n+1$ постоянных α_i должна быть аддитивной постоянной, добавляемой к S. Но легко видеть, что эта постоянная не имеет для нас значения, так как в уравнения преобразования входит не S, а только её частные производные. Следовательно, полный интеграл уравнения (9.3) можно записать в виде

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t), \tag{9.4}$$

где ни одна из n постоянных α_i не является аддитивной. Мы видим, что форма выражения (9.4) вполне соответствует форме искомой производящей функции, так как в правой части (9.4) стоит функция n координат q_i, n независимых постоянных α_i и времени t. Поэтому n постоянных α_i можно принять за новые (постоянные) импульсы, положив

$$P_i = \alpha_i. \tag{9.5}$$

Такой выбор не противоречит тому положению, что новые импульсы связаны со значениями величин q и p в момент t_0. Уравнения (8.11а) могут быть записаны теперь в виде

$$p_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i}, \tag{9.6}$$

что при $t = t_0$ даёт нам n уравнений, связывающих n величин α_i с начальными значениями q_i и p_i, позволяя определить постоянные α_i по заданным начальным условиям. Другая половина уравнений (8.11) определит тогда новые постоянные координаты. Эти уравнения будут иметь вид

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i}, \tag{9.7}$$

что позволяет, зная $(q_i)_{t=t_0}$, найти постоянные β_i с помощью непосредственного вычисления правых частей равенств (9.7) при $t = t_0$. Разрешая после этого уравнения (9.7) относительно q, получаем

$$q = q(\alpha_i, \beta_i, t), \tag{9.8}$$

что полностью решает задачу, так как таким путём мы получаем координаты как функции времени и начальных данных *).

---

*) Может возникнуть вопрос о разрешимости уравнений (9.6) относительно α_i и уравнений (9.7) относительно q_i. Вопрос этот сводится к исследованию систем (9.6) и (9.7) на независимость содержащихся в них уравнений, так как в противном случае этих уравнений будет недостаточно для определения n независимых величин α_i или q_i. Тот факт, что производные $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ в уравнениях (9.7) являются независимыми функциями q, следует непосред-

Таким образом, главная функция Гамильтона осуществляет переход к постоянным координатам β и постоянным импульсам α. *Решая уравнение Гамильтона—Якоби, мы в то же время получаем решение рассматриваемой механической задачи.* Говоря на математическом языке, мы установили соответствие между $2n$ каноническими уравнениями движения, которые являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, и уравнением Гамильтона—Якоби, которое является уравнением первого порядка в частных производных. Такое соответствие имеет место не только для уравнений Гамильтона; известно, что каждому уравнению первого порядка в частных производных соответствует определённая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В данном случае эта связь между рассматриваемым уравнением в частных производных и соответствующими каноническими уравнениями может быть объяснена происхождением этих уравнений от общего вариационного принципа — модифицированного принципа Гамильтона.

Выбор величин α_i в качестве новых импульсов является в некоторой степени произвольным, так как вместо них можно было бы выбрать любые n независимых функций от α_i. Тогда вместо постоянных α_i мы имели бы постоянные

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{9.9}$$

и главную функцию Гамильтона можно было бы записать как функцию q_i, γ_i и t, не изменяя ничего в остальных рассуждениях. Выбор в качестве новых импульсов той или иной системы γ_i часто оказывается более удобным, чем выбор постоянных, появляющихся при интегрировании уравнения Гамильтона—Якоби.

Физический смысл функции S обнаруживается при вычислении её полной производной по времени, которая равна

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$$

ственно из того, что постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ являются независимыми, ибо отсюда вытекает, что якобиан

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial \alpha_n}\right)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)} = \left|\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\right|$$

отличен от нуля. Но так как порядок дифференцирования S по α и по q не существенен, то якобиан

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \left|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}\right|$$

также должен быть отличен от нуля, что доказывает независимость уравнений (9.6).

(так как импульсы P_i не изменяются с изменением t). Но согласно равенствам (9.6) и (9.3) эту производную можно записать в виде

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L, \tag{9.10}$$

откуда

$$S = \int L\,dt + \text{const}. \tag{9.11}$$

Принцип Гамильтона представляет собой известное утверждение относительно определённого интеграла $\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt$, позволяющее получить решение задачи с помощью уравнений Лагранжа. Здесь же мы имеем аналогичный интеграл $\int L\,dt$, но неопределённый. Следует, однако, заметить, что в практических расчётах интеграл (9.11) не может оказаться полезным, так как интеграл $\int L\,dt$ может быть взят только тогда, когда q_i и p_i известны как функции времени, т. е. когда получено решение рассматриваемой задачи *).

§ 9.2. Задача о гармоническом осцилляторе. В качестве примера применения метода Гамильтона—Якоби мы подробно рассмотрим задачу о гармоническом осцилляторе с одной степенью свободы. Гамильтониан такой системы равен

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2},$$

где k — коэффициент жёсткости. Заменяя здесь p на $\frac{\partial S}{\partial q}$ и приравнивая нулю новый гамильтониан этой системы, мы получаем следующее уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{9.12}$$

Так как t содержится здесь в явном виде только в последнем члене, то можно положить:

$$S(q,\ \alpha,\ t) = W(q,\ \alpha) - \alpha t, \tag{9.13}$$

---

*) Тот факт, что интеграл $\int L\,dt$ совпадает с одной из функций S, удовлетворяющих уравнению (9.3), был установлен Гамильтоном до того, как стало ясно, что уравнение Гамильтона—Якоби даёт возможность получить полное решение данной механической задачи, что было сделано Якоби, который установил, что канонические преобразования позволяют использовать любой полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби для решения задачи о движении системы.

где α — постоянная (которая позже будет принята за преобразованный импульс системы). При таком выборе решения мы исключаем из (9.12) t и получаем

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+\frac{kq^2}{2}=\alpha. \tag{9.14}$$

Интегрируя (9.14), будем иметь

$$W=\sqrt{mk}\int dq\sqrt{\frac{2\alpha}{k}-q^2},$$

и следовательно,

$$S=\sqrt{mk}\int dq\sqrt{\frac{2\alpha}{k}-q^2}-\alpha t. \tag{9.15}$$

Полученный интеграл является довольно простым, однако вычислять его нецелесообразно, так как нам в дальнейшем потребуется не функция S, а лишь её частные производные. Для определения q мы согласно (9.7) будем иметь

$$\beta=\frac{\partial S}{\partial\alpha}\equiv\sqrt{\frac{m}{k}}\int\frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k}-q^2}}-t,$$

что можно легко проинтегрировать:

$$t+\beta=-\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos q\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}, \tag{9.16}$$

и, разрешив (9.16) относительно q, найдём

$$q=\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\cos\omega(t+\beta),\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{9.17}$$

где α и β — постоянные интегрирования. Полученное равенство совпадает с обычной формулой для гармонического колебания.

Для окончательного решения остаётся связать α и β с начальными условиями. Предположим, что при $t=0$ скорость рассматриваемой материальной точки равна нулю. Тогда в начальный момент времени будем иметь: $q=q_0$, $p=p_0=0$. Положив теперь в (9.15) $t=0$, получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_0=p_0=0=\sqrt{2m}\sqrt{\alpha-\frac{kq_0^2}{2}},$$

откуда

$$\alpha=\frac{kq_0^2}{2}=\frac{m\omega^2q_0^2}{2}. \tag{9.18}$$

Следовательно, α является начальной полной энергией системы, а так как рассматриваемая система является консервативной, то энергия её должна всё время быть равна α. В сущности, это можно было бы установить и непосредственно, исходя из формулы (9.13) и равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0,$$

которое с учётом (9.13) даёт

$$H = \alpha.$$

Подставив теперь (9.18) в (9.17), окончательно получим

$$q = q_0 \cos \omega (t + \beta),$$

откуда видно, что при заданных начальных условиях β должно быть равно нулю. Следовательно, рассматриваемая функция S осуществляет переход к новому каноническому импульсу, совпадающему с полной энергией, и к координате, тождественно равной нулю (в силу принятых начальных условий).

С помощью равенства (9.18) главную функцию Гамильтона можно записать в виде

$$S = m\omega \int \sqrt{q_0^2 - q^2}\, dq - \frac{m\omega^2 q_0^2 t}{2},$$

что с учётом (9.17) даёт *)

$$S = m\omega^2 q_0^2 \int \left(\sin^2 \omega t - \frac{1}{2}\right) dt.$$

Вычисляя теперь функцию $L(t)$, будем иметь

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) = m\omega^2 q_0^2 \left(\sin^2 \omega t - \frac{1}{2}\right),$$

откуда видно, что $S(t)$ совпадает с неопределённым интегралом $\int L\, dt$, как и должно быть на основании общего соотношения (9.11). (Убедиться в этом тождестве можно лишь после того, как будет получено окончательное решение задачи.)

§ 9.3. Характеристическая функция Гамильтона. В случае простого гармонического колебания мы смогли найти полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби. В основном это удалось сделать

---

*) Квадратный корень из $q_0^2 - q^2$ нужно брать здесь со знаком минус, так как

$$\sqrt{q_0^2 - q^2} = \frac{p}{m\omega} = \frac{\dot{q}}{\omega},$$

что согласно (9.17) равно $-q_0 \sin \omega t$.

потому, что S можно было разбить на две части, одна из которых содержала только q, а другая — только t. Мы сейчас увидим, что *если старый гамильтониан не содержит явно t, то такое разделение всегда возможно.*

Если H не является явной функцией t, то уравнение Гамильтона—Якоби принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0.$$

Первый член этого равенства содержит производную S по t, а второй — производную S по q. Поэтому полный интеграл этого уравнения можно искать в виде

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t. \tag{9.19}$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получаем

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1, \tag{9.20}$$

что представляет собой дифференциальное уравнение, уже не содержащее времени. Таким образом, одна из констант, входящих в S, именно α_1, равна постоянному значению гамильтониана H. (H обычно является энергией, однако следует помнить, что это не всегда так; см. задачу 4 гл. 7.)

Функция W, не зависящая от времени, введена нами просто как часть производящей функции S в случае, когда H не содержит явно t. Мы сейчас увидим, что её можно рассматривать как производящую функцию некоторого канонического преобразования, свойства которого отличны от свойств преобразования, осуществляемого функцией S. Рассмотрим каноническое преобразование, при котором новые импульсы являются константами движения α_i, причём α_1 равно H. Если производящую функцию этого преобразования обозначить через $W(q, P)$, то уравнения преобразования будут иметь вид:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}. \tag{9.21}$$

Хотя эти уравнения имеют сходство с уравнениями (9.6) и (9.7), однако для функции S мы имеем теперь условие, которое состоит в том, что H должно равняться новому импульсу α_1:

$$H(q_i, p_i) = \alpha_1.$$

Согласно (9.21) это условие приводит к следующему уравнению в частных производных относительно W:

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1.$$

Как можно видеть, оно не отличается от уравнения (9.20). Так как W не содержит времени, то новый и старый гамильтонианы равны и, следовательно, $K = \alpha_1$.

Функция W известна как *характеристическая функция Гамильтона*. Мы видим, что она осуществляет каноническое преобразование, в котором все новые координаты являются циклическими. В предыдущей главе мы говорили, что в случае постоянного H такое преобразование, в сущности, целиком решает задачу, так как интегрирование новых уравнений движения становится при этом тривиальным. Канонические уравнения для $\dot{P}_i$ фактически снова подтверждают, что импульсы, соответствующие циклическим координатам, являются постоянными:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad P_i = \alpha_i. \tag{9.22a}$$

Так как новый гамильтониан зависит только от одного из импульсов α_i, то уравнения движения для $\dot{Q}_i$ примут вид:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = 1 \\ 0 & \text{при} \quad i \neq 1 \end{cases},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= t + \beta_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \\ Q_i &= \beta_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad (i \neq 1). \end{aligned}\right\} \tag{9.22b}$$

Единственной координатой, которая отлична от постоянной, является здесь координата Q_1.

Зависимость функции W от старых координат q_i определяется уравнением (9.20), которое является дифференциальным уравнением в частных производных и подобно уравнению Гамильтона—Якоби (9.3). Полный интеграл его опять будет содержать n независимых постоянных, одна из которых опять будет аддитивной. Остальные постоянные $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могут вместе с α_1 быть приняты за новые постоянные импульсы. Полагая в первой половине уравнений (9.21) $t = 0$, мы можем связать n постоянных α_i с начальными значениями q_i и p_i. Наконец, разрешая равенства (9.22b) относительно q_i, мы можем получить их как функции α_i, β_i и t, чем и заканчивается решение задачи. Следует заметить, что при $i \neq 1$ уравнения (9.22b) не содержат времени. Поэтому они позволяют выразить все координаты q_i через какую-либо одну из них, для чего достаточно считать её известной и разрешить эти уравнения (при $i \neq 1$) относительно остальных координат. Таким путём мы получим *уравнения траектории* движения (в пространстве конфигураций). В случае, например, центральной силы мы получим r как функцию θ, не отыскивая r и θ как функции времени.

В качестве новых постоянных импульсов можно брать не α_1 и константы полного интеграла для W, а какие-либо n независимых функций от α_i. Обозначая эти постоянные через γ_i, можно выразить W через q_i и γ_i. В общем случае гамильтониан будет зависеть более чем от одной из величин γ_i, и уравнения для $\dot{Q}_i$ будут иметь вид

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial \gamma_i} = \nu_i,$$

где ν_i — функции γ_i. В этом случае все новые координаты будут линейными функциями времени:

$$Q_i = \nu_i t + \beta_i. \tag{9.22'}$$

Физический смысл характеристической функции W подобен физическому смыслу функции S. Так как время не входит явно в W, то полная производная $\frac{dW}{dt}$ будет равна

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_i p_i \dot{q}_i,$$

и следовательно,

$$W = \int \sum_i p_i \dot{q}_i \, dt = \int \sum_i p_i \, dq_i,$$

что представляет собой действие A, рассматривавшееся в § 7.5. Как и ранее, этот результат оказывает малую практическую помощь, так как W нельзя найти до получения полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби.

Мы рассмотрели два метода решения задач механики: один с помощью главной функции Гамильтона, другой с помощью характеристической функции Гамильтона. Полученные результаты можно записать теперь в виде следующей сравнительной схемы.

Эти методы применимы тогда, когда гамильтониан

есть любая функция q, p, t: $H = H(q, p, t)$.	постоянен: $H(q, p) = \text{const}$.

Мы ищем такое каноническое преобразование, при котором

все новые координаты Q_i и новые импульсы P_i являются постоянными.	все импульсы P_i являются постоянными.

Чтобы удовлетворить этим условиям, достаточно потребовать, чтобы новый гамильтониан

был тождественно равен нулю: $K = 0$.	был циклическим относительно всех координат: $K = H(P_i) = \alpha_1$.

При этих условиях новые уравнения движения будут иметь вид:

$\dot{Q}_i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} = 0,$ $\dot{P}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} = 0,$	$\dot{Q}_i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} = \nu_i,$ $\dot{P}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} = 0,$

а их решениями будут функции:

$Q_i = \beta_i,$ $P_i = \gamma_i,$	$Q_i = \nu_i t + \beta_i,$ $P_i = \gamma_i,$

удовлетворяющие поставленным условиям. Производящей функцией искомого преобразования будет

главная функция Гамильтона $S(q, P, t).$	характеристическая функция Гамильтона $W(q, P).$

Эта функция удовлетворяет уравнению в частных производных, имеющему вид

$H\left(q, \dfrac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0.$	$H\left(q, \dfrac{\partial W}{\partial q}\right) - \alpha_1 = 0.$

Полный интеграл этого уравнения содержит

n нетривиальных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n.$	$n-1$ нетривиальных постоянных, образующих вместе с α_1 систему из n независимых постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n.$

За новые постоянные импульсы $P_i = \gamma_i$ можно выбрать n независимых функций от n постоянных α_i:

$P_i = \gamma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$	$P_i = \gamma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$

и поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби можно рассматривать как функцию новых импульсов

$S = S(q_i, \gamma_i, t).$	$W = W(q_i, \gamma_i).$

(В частности, γ_i могут быть равны α_i.) Одна половина уравнений преобразования имеет вид

$p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$	$p_i = \dfrac{\partial W}{\partial q_i}$

и выполняется автоматически, так как эти равенства использовались при составлении уравнения Гамильтона — Якоби. Остальные уравнения преобразования имеют вид

$Q_i = \dfrac{\partial S}{\partial \gamma_i} = \beta_i$	$Q_i = \dfrac{\partial W}{\partial \gamma_i} = \nu_i(\gamma_i)\, t + \beta_i$

и могут быть разрешены относительно q_i, в результате чего q_i получатся выраженными через t и $2n$ постоянных β_i, γ_i. Окончательное решение задачи сведётся тогда к выражению $2n$ постоянных через начальные значения координат и импульсов (через q_{i0} и p_{i0}).

Если гамильтониан не содержит явно t, то можно пользоваться любым из этих методов. Соответствующие производящие функции будут связаны тогда равенством

$$S(q,\ P,\ t) = W(q,\ P) - \alpha_1 t.$$

§ 9.4. Разделение переменных в уравнении Гамильтона — Якоби. Из содержания предыдущего параграфа может показаться, что метод Гамильтона — Якоби не имеет практических преимуществ, так как вместо решения $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений он требует решения дифференциального уравнения в частных производных, что, как известно, сложнее. Однако при некоторых условиях переменные уравнения Гамильтона — Якоби можно разделить, и тогда решение задачи удаётся свести к квадратурам. Именно в этом случае метод Гамильтона — Якоби становится полезным в практическом отношении.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие системы, гамильтониан которых является одним из первых интегралов (при этом он не обязательно должен быть полной энергией). Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением лишь тех канонических преобразований, которые осуществляются функцией, определяемой соответствующим дифференциальным уравнением в частных производных. Разделение переменных, которое мы имеем в виду, удаётся произвести тогда, когда решение вида

$$W = \sum_i W_i(q_i,\ \alpha_1, \ldots,\ \alpha_n)$$

разбивает рассматриваемое уравнение на n уравнений вида

$$H_i\left(q_i,\ \frac{\partial W_i}{\partial q_i},\ \alpha_1, \ldots,\ \alpha_n\right) = \alpha_i. \tag{9.23}$$

Каждое из полученных таким путём уравнений (9.23) содержит лишь одну координату и лишь одну частную производную — как раз по этой координате. Поэтому эти уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, которые можно свести к квадратурам, разрешая их относительно $\frac{\partial W_i}{\partial q_i}$.

К сожалению, нельзя дать простого критерия, указывающего, когда можно произвести такое разделение переменных *). В некоторых случаях, например в известной задаче о трёх телах, его вообще

*) Более подробно этот вопрос рассмотрен в статье Нордхейма и Фюза, (см. Handbuch der Physik, т. V), а также в книге Франка и Мизеса: «Differential Gleichungen der Physik», т. 2, гл. 2, § 5, и в литературе, указанной в этой работе.

нельзя осуществить. Однако в системах, представляющих интерес для современной атомной физики, такое разделение удаётся произвести почти всегда. Следует подчеркнуть, что решение вопроса о разделении переменных в уравнении Гамильтона — Якоби зависит от того, какой системой обобщённых координат мы пользуемся. Например, в задаче о движении точки под действием центральной силы переменные разделяются в случае применения полярных координат r и φ и не разделяются в случае применения декартовых координат x и y. Во многих случаях существует более чем одна система координат, допускающая разделение переменных.

Частичное разделение переменных уже применялось нами при решении уравнения Гамильтона — Якоби в случае, когда H не является явной функцией t. В этом случае мы искали S в виде

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) + S_2(t, \alpha_i),$$

что после подстановки в уравнение Гамильтона — Якоби приводит к равенству

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S_2}{\partial t} = 0.$$

Так как первый член этого уравнения содержит только q_i, а второй — только t, то оно может удовлетворяться лишь теми функциями, при которых как H, так и $\frac{\partial S_2}{\partial t}$ являются постоянными. Таким образом, мы приходим к уравнениям:

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\alpha_1, \tag{9.24a}$$

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1, \tag{9.24b}$$

первое из которых показывает, что $S_2 = -\alpha_1 t$ [см. равенство (9.13)], а второе является уравнением Гамильтона — Якоби для функции W.

Аналогичное разделение переменных в характеристической функции Гамильтона можно произвести в том случае, когда все координаты, кроме одной, являются циклическими. Рассмотрим, например, тот случай, когда единственной нециклической координатой является q_1. Будем искать W в виде

$$W = \sum_i W_i(q_j, P_j).$$

Так как импульсы, соответствующие циклическим координатам, являются постоянными, то при $i \neq 1$ уравнения преобразования будут иметь вид

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i = \alpha_i, \tag{9.25a}$$

и поэтому уравнение Гамильтона — Якоби запишется в виде

$$H\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = \alpha_1, \tag{9.25b}$$

что представляет обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно W_1, и, следовательно, легко может быть решено. Уравнения (9.25a) и (9.25b) полностью определяют характеристическую функцию W, и так как интегрирование уравнений (9.25a) приводит к равенствам

$$W_i = \alpha_i q_i \qquad (i \neq 1),$$

то для W будем иметь:

$$W = W_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i q_i. \tag{9.26}$$

Можно заметить сходство между равенствами (9.26) и (9.13), определяющими S в случае, когда H не содержит явным образом t. Действительно, их можно рассматривать как равенства, полученные одинаковым путём. Мы видели, что t можно рассматривать как обобщённую координату, которой соответствует канонический импульс — H. Следовательно, если $H = \text{const}$, то t можно рассматривать как циклическую координату, а уравнение (9.24a) — как одно из уравнений (9.25), справедливых для любых циклических координат *).

В качестве примера рассмотрим задачу о плоском движении точки под действием центральной силы. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r)$$

и является циклическим относительно φ. В соответствии с этим характеристическую функцию Гамильтона можно записать в виде

$$W = W_1(r) + \alpha_\varphi \varphi, \tag{9.27}$$

*) Равенство (9.26) можно получить также из следующих соображений. Мы знаем, что W является производящей функцией преобразования, при котором все новые координаты являются циклическими. Но если координаты $q_2, \ldots, q_n$ уже являются циклическими, то для них такое преобразование не нужно. Поэтому в отношении этих координат преобразование W может быть тождественным. Обращаясь теперь к равенству (9.26), мы видим, что так как α_i являются новыми импульсами, то сумма $\sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_i q_i$ может быть записана в виде

$$\sum_{i=2}^{n} P_i q_i,$$

что для координат $q_2, \ldots, q_n$ представляет производящую функцию тождественного преобразования [см. равенство (8.19)].

где α_φ — постоянный кинетический момент p_φ, соответствующий координате φ. Уравнение Гамильтона — Якоби запишется в данном случае следующим образом:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}\right]+V(r)=\alpha_1, \tag{9.28}$$

где α_1 — постоянная, имеющая простой физический смысл: это — полная энергия системы. Разрешая уравнение (9.28) относительно $\frac{\partial W_1}{\partial r}$, получаем

$$\frac{\partial W_1}{\partial r}=\sqrt{2m(\alpha_1-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}},$$

откуда

$$W=\int dr\sqrt{2m(\alpha_1-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}+\alpha_\varphi\varphi.$$

При такой характеристической функции равенства (9.22b) принимают вид:

$$t_1+\beta_1=\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}=\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m(\alpha_1-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}} \tag{9.29a}$$

и

$$\beta_2=\frac{\partial W}{\partial\alpha_\varphi}=-\int\frac{\alpha_\varphi\,dr}{r^2\sqrt{2m(\alpha_1-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}}+\varphi. \tag{9.29b}$$

Первое из них определяет r как функцию t и совпадает с равенством (3.18), в котором α_1 и α_φ выражены через E и l.

Ранее отмечалось, что $(n-1)$ последних уравнений (9.22b) [в данном случае одно уравнение (9.29b)] определяют уравнение траектории. Полагая в (9.29b) $u=\frac{1}{r}$, будем иметь

$$\varphi=\beta_2-\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{\alpha_\varphi^2}(\alpha_1-V)-u^2}},$$

что при отождествлении β_2 с φ_0 совпадает с равенством (3.37), полученным ранее для орбиты точки.

На этом простом примере можно ясно видеть мощность и изящество метода Гамильтона — Якоби, позволившего нам быстро получить уравнение орбиты и зависимость r от t, что раньше требовало больших выкладок. Разделение переменных в уравнении Гамильтона — Якоби не ограничивается, конечно, тем случаем, когда лишь одна координата является нециклической. Если, например, гамильтониан рассмотренной сейчас точки написать в *сферических* координатах, то из трёх координат циклической будет лишь одна — угол φ. Однако уравнение Гамильтона — Якоби будет и в этом случае допускать разделение переменных (см. § 9.7).

§ 9.5. Переменные действие — угол. Во многих разделах физики важную роль играют системы, движение которых является периодическим. В таких системах нас часто интересуют не столько подробности траекторий их точек, сколько частоты этих движений. Мы сейчас рассмотрим весьма изящный и эффективный метод исследования таких систем, основанный на методе Гамильтона — Якоби. В этом

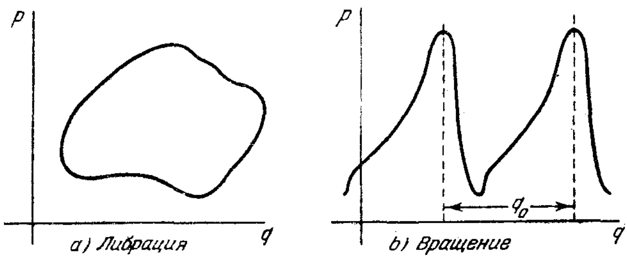

Рис. 63. Траектория изображающей точки в фазовом пространстве в случае периодического движения системы с одной степенью свободы.

методе в качестве новых импульсов выбираются не постоянные α_i, непосредственно входящие в полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, а подходящим образом определённые постоянные J_i, образующие n независимых функций от α_i. Они носят название *действий*.

Прежде чем вводить эти переменные, необходимо точно определить смысл термина «периодическое движение». Рассмотрим сначала систему с одной степенью свободы. Фазовым пространством такой системы является двумерная плоскость, и здесь можно различать два вида периодического движения:

1. Движением первого типа является такое, при котором $q(t)$ и $p(t)$ суть две периодические функции времени с одинаковым периодом. Такое движение характерно для колебательных систем, например для линейного гармонического осциллятора с одной степенью свободы. Для этих движений часто применяют астрономический термин *либрация*. Так как значения переменных q и p повторяются при этом движении через каждый период, то точка, изображающая такую систему, описывает в фазовом пространстве *замкнутую* траекторию (рис. 63, *а*).

2. Во втором типе периодического движения само q не изменяется периодическим образом, но является таким, что при увеличении

его на некоторую величину q_0 конфигурация системы, в сущности, не изменяется. Наиболее простым примером такого движения является движение твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Координатой q здесь является угол поворота, увеличение которого на 2π не изменяет положения тела. В отличие от либрации его называют *вращением*. Значения q не являются здесь ограниченными и могут сколь угодно возрастать. Поэтому траекторией изображающей точки будет в этом случае незамкнутая кривая, но p будет некоторой периодической функцией q с периодом q_0 (рис. 63, b).

Следует заметить, что оба вида периодичности могут встретиться в одной и той же физической системе. Классическим примером такого рода может служить движение простого маятника, если координатой q считать угол отклонения θ. Постоянная энергия этой системы равна

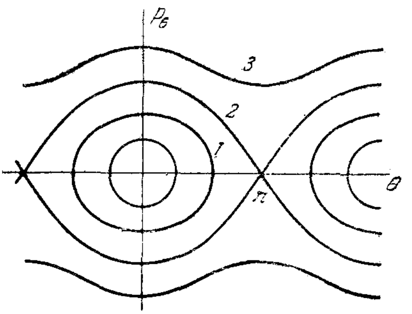

Рис. 64. Траектория изображающей точки в случае простого маятника.

$$E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta, \quad (9.30)$$

где l — длина маятника. Разрешая равенство (9.30) относительно p_θ, получаем

$$p_\theta = \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\theta)}, \quad (9.31)$$

что является уравнением траектории изображающей точки в фазовом пространстве. Если E меньше чем mgl, то движение системы будет возможно лишь при $|\theta| < \theta'$, где

$$\theta' = \arccos\left(-\frac{E}{mgl}\right).$$

При этих условиях маятник будет колебаться в пределах между $-\theta'$ и $+\theta'$, т. е. будет совершать периодическое движение типа либрации. Траектория изображающей точки будет при этом подобна кривой *1* на рис. 64.

Однако если $E > mgl$, то все значения θ будут здесь физически возможными, и θ будет неограниченно возрастать, т. е. маятник будет совершать периодическое движение вращательного типа. Физически это объясняется тем, что маятник обладает достаточно большой энергией, позволяющей ему пройти через вертикальное положение ($\theta = \pi$) и, следовательно, непрерывно вращаться. На рис. 64 этому случаю соответствует кривая *3*.

В предельном случае, когда $E = mgl$, мы будем иметь картину, которую изображает кривая *2* на рис. 64.

В системах более чем с одной степенью свободы мы ограничимся рассмотрением лишь тех задач, в которых уравнение, определяющее характеристическую функцию W, является уравнением с разделяющимися переменными (по крайней мере, для одной системы канонических переменных). Движение системы мы будем представлять как движение изображающей точки в многомерном фазовом пространстве (q, p). Будем говорить, что это движение является периодическим, если, проектируя изображающую точку на каждую плоскость (q_i, p_i), мы получаем периодическое движение в обычном смысле слова (как для системы с одной степенью свободы). Но так как мы рассматриваем случай полного разделения переменных, то эти движения будут независимыми, и их можно легко исследовать. Согласно уравнениям канонического преобразования

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_i}. \tag{9.32}$$

Следовательно, каждое p_i является функцией соответствующего q_i и n постоянных α_j:

$$p_i = p_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{9.33}$$

Легко видеть, что это уравнение дает проекцию траектории изображающей точки на плоскость (q_i, p_i). Отсюда следует, что рассматриваемое движение будет периодическим только тогда, когда кривая (9.33) будет замкнутой или периодической относительно q_i.

Периоды движений, описываемых парами (q_i, p_i), не обязательно должны быть одинаковыми. Примером может служить гармонический осциллятор с тремя степенями свободы в случае, когда три его коэффициента жёсткости различны. Суммарное движение колеблющейся таким образом точки будет в этом случае не обязательно периодическим, так как периоды составляющих движений могут быть здесь несоизмеримыми, и траектория движущейся точки будет тогда разомкнутой (так называемая «фигура Лиссажу»). Такое движение называют *почти-периодическим*.

Теперь мы можем ввести действия $J_1, \ldots, J_n$, которые в качестве преобразованных постоянных импульсов P_i будут заменять постоянные α_i. Под J_i мы будем понимать интеграл

$$J_i = \oint p_i\, dq_i, \tag{9.34}$$

взятый за полный период изменения q_i (колебания или вращения, смотря по тому, какой случай имеет место). Термин «действие» употребляется здесь в связи со сходством интеграла (9.34) с действием A (см. § 7.5), равным по определению

$$A = \int \sum_i p_i\, dq_i = \int \sum_i p_i \dot{q}_i\, dt.$$

Согласно уравнению (9.32) J_i можно записать в виде

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_i}, \tag{9,35}$$

откуда видно, что каждая из величин J_i является функцией n постоянных α_i, входящих в полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Но из независимости пар (q_i, p_i) следует, что эти функции являются независимыми. Следовательно, величины J_i можно принять за новые постоянные импульсы. Выражая α_i через J_i, можно характеристическую функцию W записать в виде

$$W = W(q_1, \ldots, q_n, J_1, \ldots, J_n),$$

а гамильтониан — в виде

$$H = \alpha_1 = H(J_1, \ldots, J_n). \tag{9.36}$$

Заметим, что согласно определению [см. равенство (9.34)] размерность величин J_i совпадает с размерностью кинетического момента.

Если одна из переменных q_i является циклической, то соответствующий ей импульс будет постоянным. Соответствующая траектория в плоскости $q_i p_i$ будет тогда горизонтальной прямой линией, не имеющей ясно выраженного периодического характера. Такое движение можно рассматривать как предельный случай периодического движения вращательного типа, причём координате q_i можно здесь приписать любой период. Но так как во вращательном движении координатой всегда служит угол, то естественным периодом такой циклической координаты является величина 2π. Поэтому интеграл (9.34) должен в этом случае вычисляться от нуля до 2π и, следовательно,

$$J_i = 2\pi p_i \tag{9.34'}$$

для всех циклических переменных.

Обобщённые координаты, соответствующие величинам J_i, известны под названием *угловых переменных* w_i. Они определяются равенствами

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}. \tag{9.37}$$

Уравнения, определяющие функции $w_i(t)$, будут иметь вид

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1, \ldots, J_n)}{\partial J_i} = \nu_i(J_1, \ldots, J_n), \tag{9.38}$$

где ν_i — постоянные величины, являющиеся функциями $J_1, \ldots, J_n$. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$w_i = \nu_i t + \beta_i. \tag{9.39}$$

Следовательно, w_i являются линейными функциями времени [так же, как в уравнениях (9.22')].

С помощью уравнений (9.37) и (9.39) можно получить q_i как функции t, ν_i и β_i, подобно тому как мы это делали в случае, когда новыми импульсами служили постоянные α_i. Однако переменные J_i,

w_i не обнаруживают в этом отношении больших преимуществ по сравнению с координатами α_i.

Выясним теперь физический смысл величин ν_i. Допустим, что координата q_j совершает полный цикл изменения (либрации или вращения), в то время как остальные координаты остаются при этом неизменными. Рассмотрим приращение Δw_1, которое получает при этом величина w_i. Оно равно

$$\Delta w_i = \oint \delta w_i,$$

где δw_i — бесконечно малое изменение w_i, получающееся вследствие бесконечно малого изменения q_j. Учитывая, что

$$\delta w_i = \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j, \tag{9.40}$$

и подставляя (9.40) в (9.37), получаем

$$\Delta w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \, \partial J_i} dq_j.$$

Вынося теперь производную по J_i за знак интеграла, будем иметь

$$\Delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j \, dq_j$$

(с учётом уравнений преобразования). Но так как

$$\oint p_j \, dq_j = J_j,$$

то окончательно получаем

$$\Delta w_i = \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = \delta_{ij}. \tag{9.41}$$

Равенство (9.41) показывает, что при $j = i$ угловая переменная w_i равна единице, а при $j \neq i$ она равна нулю. Поэтому если τ_i будет означать период одного цикла изменения q_i, то согласно (9.39) будем иметь

$$\Delta w_i = 1 = \nu_i \tau_i,$$

откуда

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i}. \tag{9.42}$$

Следовательно, *постоянная ν_i равна частоте изменения* q_i.

Таким образом, переменные действие — угол (J_i, w_i) весьма удобны для получения частот периодических движений; при этом *не требуется полного исследования движения системы*. Если априори известно, что система является периодической, то для нахождения её частот достаточно найти согласно (9.34) переменные действия J_i и выразить H через J_i, после чего останется вычислить производные $\frac{\partial H}{\partial J_i}$ и получить таким путём частоты ν_i [см. равенство (9.38)].

Теперь ясно, почему величины w_i называют угловыми переменными: это связано с тем, что величина ν_i в равенстве (9.39) означает частоту. Кроме того, этот термин находится в согласии с тем фактом, что J_i имеет размерность кинетического момента, так как кинетический момент есть обобщённый импульс, соответствующий угловой координате.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу об определении частоты обычного гармонического осциллятора. В данном случае мы имеем только одну переменную действия J, которая согласно (9.15) равна

$$J = \oint p\, dq = \oint \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q}\, dq = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}\, dq.$$

Полагая

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin \varphi,$$

будем иметь:

$$J = 2\alpha \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi, \tag{9.43}$$

где пределы 0 и 2π соответствуют полному циклу изменения q. Производя вычисления, получаем:

$$J = 2\pi\alpha \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{9.44}$$

Разрешая теперь равенство (9.44) относительно α, будем иметь:

$$\alpha = H = \frac{J}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}},$$

откуда

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\pi},$$

что совпадает с известной формулой для собственной частоты гармонического осциллятора.

§ 9.6. Другие свойства переменных действие — угол. В предыдущем параграфе было установлено, что когда w_i изменяется на единицу, координата q_i совершает полный цикл изменения. В случае периодического движения типа либрации это означает, что q_i возвращается к своему первоначальному значению. Следовательно, в случае либрации переменная q_i должна быть периодической функцией переменной w_i, и период этой функции должен быть равен $\Delta w_i = 1$. Поэтому либрационную координату q_k можно представить в виде ряда

$$q_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi i j w_k} \qquad \text{(либрация)}, \tag{9.45a}$$

являющегося рядом Фурье. Согласно (9.39) его можно записать в виде

$$q_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi i j(\nu_k t+\beta_k)} \qquad \text{(либрация)}, \tag{9.46a}$$

где j — целое число, пробегающее значения от $-\infty$ до $+\infty$. Коэффициенты этого ряда определяются известными равенствами

$$a_j = \int_0^1 q_k e^{-2\pi i j w_k}\, dw_k. \tag{9.47}$$

Если же движение носит вращательный характер, то изменению w_k на единицу соответствует увеличение переменной q_k на величину её периода q_{0k}. Поэтому такая координата не является периодической функцией w_k, но легко видеть, что разность $q_k - w_k q_{0k}$ будет в этом случае периодической функцией w_k с периодом, равным единице. Поэтому её можно разложить в ряд Фурье

$$q_k - w_k q_{0k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi i j w_k} \qquad \text{(вращение)}. \tag{9.45b}$$

Соответствующая зависимость от времени будет выражаться рядом

$$q_k - (\nu_k t + \beta_k)\, q_{0k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi i j(\nu_k t+\beta_k)} \qquad \text{(вращение)}. \tag{9.46b}$$

Следовательно, и при либрации, и при вращении зависимость q_k от t можно представить с помощью суммы гармоник, частоты которых кратны ν_k. Однако если мы будем рассматривать функцию нескольких q_k, то в её ряд Фурье будут входить члены, соответствующие нескольким частотам ν_k. Например, декартовы координаты x_i часто являются неразделяющимися. Однако они могут быть выражены через разделяющиеся координаты q_k, и тогда ряд Фурье для x_i будет содержать все возможные линейные комбинации основных частот ν_k. Таким образом, мы приходим к разложению вида

$$x_i = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} a_{j_1 \dots j_n} e^{2\pi i (j_1 w_1 + j_2 w_2 \dots j_n w_n)}, \tag{9.48}$$

где j — целые числа, пробегающие значения от $-\infty$ до $+\infty$. Переходя к зависимости от t, мы можем записать это уравнение в следующем окончательном виде:

$$x_i = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} a_{j_1 \dots j_n} e^{2\pi i (j\nu_1 + \dots j_n \nu_n)\, t + 2\pi i (j_1\beta_1 + \dots j_n \beta_n)}. \tag{9.49}$$

Пусть теперь не все ν_i являются соизмеримыми. Тогда функция (9.49) не будет периодической функцией времени в обычном смысле этого слова [как, например, функция (9.46а)]. Это связано с тем, что хотя множитель

$$e^{2\pi i j_1 \nu_1 t}$$

и является периодической функцией t, однако период его $1/\nu_1$ несоизмерим с периодами других аналогичных множителей. Поэтому в целом эта функция не является периодической. В таких случаях говорят, что рассматриваемая функция является *много-периодической* или *почти-периодической*. (Такого рода функция уже встречалась нам при рассмотрении гармонического осциллятора с несколькими степенями свободы.) Рассмотрим, например, колебания точки, находящейся под действием восстанавливающих сил, направленных вдоль осей x и y. Эти координаты являются разделяющимися переменными, изменяющимися по гармоническому закону с частотами ν_x и ν_y. Повернём теперь систему координат на 45° вокруг оси z. Тогда мы получим новые координаты x', y', изменяющиеся по закону

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x) + y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y)\right], \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y) - x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (9.50)$$

Если ν_x/ν_y есть число рациональное, то написанные функции будут периодическими, а траектория точки будет замкнутой фигурой Лиссажу. Но если числа ν_x и ν_y несоизмеримы, то получающаяся фигура не будет замкнутой, и движение не будет строго повторяющимся. Уравнения (9.50) будут в этом случае простейшими частными случаями уравнения (9.49).

Почти-периодическую функцию можно получить с помощью производящей функции W. Равенство (9.35) показывает, что когда q_i совершает полный цикл изменения, т. е. когда w_i изменяется на единицу, характеристическая функция увеличивается на J_i. Отсюда следует, что если одна из величин w_k увеличивается на единицу, а остальные не меняются, то функция

$$W' = W - \sum_k w_k J_k \qquad (9.51)$$

также остаётся неизменной. Поэтому функция (9.51) является многопериодической и может быть разложена в ряд вида (9.48) (по w_i) или вида (9.49) (по ν_i). Так как согласно уравнениям преобразования

$$w_k = \frac{\partial W}{\partial J_k},$$

то легко видеть, что равенство (9.51) определяет преобразование Лежандра, осуществляющее переход от переменных q, J к переменным q, w. Сравнение с равенством (8.10) показывает, что $W'(q, w)$ есть производящая функция типа $F_1(q, Q)$, осуществляющая переход от канонических переменных q, p к каноническим переменным w, J.

Функция W', конечно, *не является* решением уравнения Гамильтона—Якоби *), хотя она осуществляет такое же преобразование, как функция W.

Для того чтобы конфигурация системы не изменялась строго периодическим образом, частоты движения должны быть несоизмеримыми. В противном случае конфигурация системы будет через достаточно большой промежуток времени повторяться. Формальным признаком соизмеримости всех частот является существование $n-1$ соотношений вида

$$\sum_{i=1}^{n} j_i \nu_i = 0, \tag{9.52}$$

где j_i — целые числа. Эти уравнения позволяют представить любое ν_i в виде рациональной части любого другого ν_i. Если система такова, что можно составить лишь m соотношений вида (9.52), то говорят, что она является *m-кратно вырождающейся*. Если, в частности, $m = n - 1$, то её называют *полностью вырождающейся* (движение системы будет в этом случае чисто периодическим). Следовательно, *в случае замкнутой траектории изображающей точки движение системы является полностью вырождающимся* **).

---

*) Переменные действие — угол мы ввели на основании рассмотрения разделяющихся координат, изменяющихся по периодическому закону, а затем показали, что движение системы является в общем случае много-периодическим. Следует заметить, что можно было бы проделать это в обратном порядке, т. е. начать с того факта, что движение системы является много-периодическим, а затем ввести переменные действие — угол. При этом нужно потребовать, чтобы конфигурация системы и производящая функция $W'(q, w)$ были много-периодическими относительно переменных w с периодом, равным единице, а гамильтониан был циклическим относительно всех переменных w. Таким путём можно было бы избежать необходимости обращаться к разделяющимся координатам. Более подробно об этом см. Born, The Mechanics of the Atom, § 15.

**) Существует интересная связь между вырождением системы и возможностью разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби. Можно показать, что в случае невырождающейся системы траектория изображающей точки целиком заполняет некоторую ограниченную область фазового пространства (равно, как и пространства конфигураций; см. Приложение 1 к уже цитированной книге Борна). Но мы знаем, что разделяющиеся координаты изменяются независимо друг от друга по строго периодическим законам. Следовательно, траектория изображающей точки должна быть ограничена поверхностями $q_i = \text{const}$, $p_i = \text{const}$, которые определяют границы изменения q_i и p_i. (Эти соображения легко распространить и на случай вращательного движения, для чего нужно ограничить изменения углов интервалом от нуля до 2π.) Эти поверхности определяют объём пространства, всюду плотно заполненный траекторией изображающей точки, откуда следует, что в невырождающихся системах можно лишь единственным образом произвести разделение переменных. Это значит, что в этом случае нельзя выбрать две различные системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении Гамильтона—Якоби (не считая тривиальных вариантов, таких, например, как изменение масштаба). Поэтому наличие двух таких систем обобщённых координат ясно указывает на вырождение данной механической системы.

Простейшим случаем вырождения является такой, когда несколько частот равны. Пусть, например, мы имеем гармонический осциллятор с тремя степенями свободы. Если у него будут два одинаковых коэффициента восстанавливающей силы, то соответствующие частоты также будут одинаковыми, и эта система будет иметь одну степень вырождения. В случае колебания в изотропной упругой среде коэффициенты восстанавливающей силы одинаковы по всем направлениям, и поэтому будут равны все частоты колебания. Такая система является полностью вырождающейся.

В случае, когда имеется вырождение, частоты колебаний не являются независимыми, и движение системы можно описать числом частот, меньшим, чем n. Если, например, имеется m условий вырождения, то их можно использовать и понизить число частот до $n-m$; в этом случае мы будем иметь $n-m$ периодов движения. Изящный способ уменьшения числа частот даёт точечное преобразование переменных действие — угол. Пусть m условий вырождения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} j_{ki}\nu_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{9.53}$$

Рассмотрим теперь точечное преобразование $(w, J) \to (w', J')$, определяемое производящей функцией

$$F_2 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} J'_k j_{ki} w_i + \sum_{k=m+1}^{n} J'_k w_k \tag{9.54}$$

[см. уравнение (8.19)]. Новые координаты w' будут тогда равны

$$\left.\begin{aligned} w'_k &= \sum_{i=1}^{n} j_{ki} w_i \qquad (k = 1, \ldots, m),\\ w'_k &= w_k \qquad (k = m+1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{9.55}$$

а новые частоты ν' —

$$\left.\begin{aligned} \nu'_k &= \dot{w}'_k = \sum_{i=1}^{n} j_{ki}\nu_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m),\\ \nu'_k &= \nu_k \qquad (k = m+1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{9.56}$$

Следовательно, m частот будут теперь равны нулю, и останется лишь $n-m$ независимых частот. Новые координаты w'_k, очевидно, можно считать угловыми переменными, так как конфигурация системы получается в этих координатах периодической с периодом, равным единице. Переменные J'_k можно получить посредством решения n уравнений преобразования

$$J_i = \sum_{k=1}^{m} J'_k j_{ki} + \sum_{k=m+1}^{n} J'_k \delta_{ki}. \tag{9.57}$$

В ряде Фурье нулевым частотам соответствуют постоянные множители. Они имеются, конечно, и в первоначальном ряде Фурье, т. е. в ряде (9.49), где они получаются при значениях J_i, удовлетворяющих условиям вырождения.

Так как

$$\nu'_i = \frac{\partial H}{\partial J'_i},$$

то гамильтониан не должен зависеть от переменных J_i, для которых соответствующие частоты равны нулю. Поэтому в полностью вырождающейся системе гамильтониан можно сделать зависящим лишь от одной переменной J_i.

Многие факты, связанные с вырождением, хорошо иллюстрируются на примере движения под действием центральной силы $F = -k/r^2$. Это движение интересно также и в том отношении, что оно позволяет показать, как переменные J и w применяются к исследованию некоторых систем. Кроме того, при этом обнаруживается связь с квантовой механикой Бора. Поэтому следующий параграф мы посвящаем подробному рассмотрению задачи Кеплера в переменных J, w.

§ 9.7. Задача Кеплера в переменных действие — угол. Для общности будем пользоваться пространственными координатами, т. е. не будем априори считать рассматриваемое движение плоским. В сферических координатах кинетическая энергия равна

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2), \tag{9.58}$$

а канонические импульсы имеют вид:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}. \tag{9.59}$$

Поэтому гамильтониан этой системы равен

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{k}{r}. \tag{9.60}$$

Коэффициент k будем считать положительным, так как при $k < 0$ орбита планеты не является ограниченной и, следовательно, движение не может быть периодическим. Из равенства (9.60) видно, что характеристическая функция W определяется здесь уравнением

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = \alpha_1 = E, \tag{9.61}$$

где α_1 — постоянная, равная полной энергии. Переменные уравнения (9.61) можно разделить, полагая

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi). \tag{9.62}$$

Подставим это выражение в (9.61). Тогда, учитывая, что φ появится при этом лишь в члене

$$\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2,$$

мы видим, что равенство (9.61) будет справедливо для всех φ лишь при условии

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = \alpha_\varphi, \tag{9.63a}$$

где α_φ — постоянная. Поэтому уравнение (9.61) можно записать в виде

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right]\right\} - \frac{k}{r} = E.$$

Но так как выражение в квадратных скобках содержит только θ, то

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2, \tag{9.63b}$$

где α_θ — ещё одна постоянная. Таким образом, уравнение (9.61) принимает вид

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m\left(E + \frac{k}{r}\right). \tag{9.63c}$$

Каждое из равенств (9.63) выражает некоторую теорему о сохранении. Рассмотрим, например, первое из них. Оно показывает, что величина p_φ является постоянной. Следовательно, это равенство выражает закон о сохранении кинетического момента относительно оси z. Рассмотрим теперь равенство (9.63b), записав его в виде

$$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2.$$

Заметим, что в плоских полярных координатах гамильтониан равен

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p^2}{r^2}\right] - \frac{k}{r},$$

где p — величина полного кинетического момента. Сравнение этого выражения с гамильтонианом (9.60) показывает, что α_θ следует считать равным p. Поэтому равенство (9.63b) выражает закон о сохранении полного кинетического момента. Что касается равенства (9.63c), то оно выражает закон о сохранении энергии.

Уравнения (9.63) можно проинтегрировать и получить производящую функцию. Однако мы не будем этого делать, так как нас интересуют главным образом переменные действие — угол (J, w).

В данном случае имеется три переменных J, определяемых равенствами:

$$J_1 \equiv J_\varphi = \oint p_\varphi \, d\varphi = \oint \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \, d\varphi, \tag{9.64a}$$

$$J_2 \equiv J_\theta = \oint p_\theta \, d\theta = \oint \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \, d\theta, \tag{9.64b}$$

$$J_3 \equiv J_r = \oint p_r \, dr = \oint \frac{\partial W_r}{\partial r} \, dr. \tag{9.64c}$$

С помощью соотношений (9.63) их можно записать в виде:

$$J_\varphi = \oint \alpha_\varphi \, d\varphi, \tag{9.65a}$$

$$J_\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} \, d\theta, \tag{9.65b}$$

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} \, dr. \tag{9.65c}$$

Первый из этих интегралов является тривиальным; так как за один оборот φ изменяется на 2π, то

$$J_\varphi = 2\pi\alpha_\varphi = 2\pi p_\varphi. \tag{9.66}$$

Этот результат можно было предвидеть заранее, так как φ является циклической координатой гамильтониана H. Поэтому равенство (9.66) является частным случаем равенства (9.34′), справедливого для любой циклической координаты.

Интеграл (9.65b) также можно вычислить без особого труда, что проще всего сделать с помощью процедуры, которую предложил ван Флек (J. H. Van Vleck). Вспомним, что если равенства, связывающие декартовы координаты с обобщёнными, не содержат времени, то

$$2T = \sum_i p_i \dot{q}_i$$

(см. § 2.6). Выражая кинетическую энергию в сферических и в плоских полярных координатах, будем иметь

$$p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} = p_r \dot{r} + p \dot{\psi},$$

где ψ — полярный угол точки в плоскости её траектории. Поэтому $p_\theta \, d\theta$ в интеграле (9.64b) можно заменить разностью $p \, d\psi - p_\varphi \, d\varphi$. В результате получим

$$J_\theta = \oint p \, d\psi - \oint p_\varphi \, d\varphi.$$

Когда θ совершает полный цикл либрации, φ и ψ изменяются на 2π и, следовательно,

$$J_\theta = 2\pi (p - p_\varphi) = 2\pi (\alpha_\theta - \alpha_\varphi). \tag{9.67}$$

Интеграл J_r можно записать теперь в виде

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\theta + J_\varphi)^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr. \tag{9.68}$$

После выполнения интегрирования это равенство можно разрешить относительно энергии $E \equiv H$, что даст нам H как функцию переменных J_φ, J_θ, J_r. Следует заметить, что переменные J_φ и J_θ войдут при этом в E в виде суммы $J_\theta + J_\varphi$, что указывает на равенство частот ν_φ и ν_θ, т. е. на вырождение. Заметим, что, делая это утверждение, мы не пользуемся тем фактом, что сила изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Следовательно, *движение под действием центральной силы всегда имеет, по крайней мере, одну степень вырождения.*

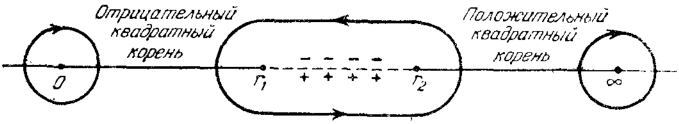

Рис. 65. Комплексная плоскость r и кривые интегрирования для вычисления интеграла J_r.

Интеграл (9.68) может быть вычислен элементарными методами, однако особенно быстро и изящно это можно сделать с помощью теории вычетов, что было впервые проделано Зоммерфельдом. Рассмотрим в общих чертах этот способ. Прежде всего заметим, что E следует считать отрицательным, так как только тогда движение рассматриваемой точки будет ограниченным (см. § 3.3). Далее, так как интегрируемая функция равна здесь $p_r = m\dot{r}$, то пределы изменения r определяются корнями выражения, стоящего под знаком радикала. Пусть r_1 — меньший из этих корней, а r_2 — больший (см. рис. 24). Тогда полный цикл изменения r будет состоять из двух частей: сначала r будет увеличиваться от значения r_1 до значения r_2, а затем будет вновь уменьшаться до первоначального значения r_1. В первой фазе этого изменения p_r будет положительным, и радикал (9.68) нужно будет брать со знаком плюс, а во второй фазе, когда p_r отрицательно, его нужно будет брать со знаком минус. Следовательно, нам нужно будет произвести интегрирование двузначной функции, двигаясь на участке от r_1 до r_2 по одной ветви, а на участке от r_2 до r_1 — по другой. Так как точками разветвления этой функции являются точки r_1 и r_2, то комплексную плоскость этой функции можно рассматривать как один из листов римановой поверхности, разрезанной вдоль вещественной оси на участке от r_1 до r_2, как показано на рис. 65.

Так как путь интегрирования охватывает здесь линию между точками разветвления, то непосредственное применение теории вычетов оказывается невозможным. Однако его можно рассматривать как путь, окружающий точку ∞, и в соответствии с этим нужно будет изменить направление интегрирования на противоположное (т. е. по ходу часовой стрелки) *). Интегрируемая функция будет тогда однозначной функцией, заданной в области вне контура, охватывающего точки r_1 и r_2, и мы сможем применить теорию вычетов. В этой области будут лишь две особые точки: начало координат и бесконечность, и поэтому путь интегрирования нужно будет заменить на две окружности, по которым эти точки обходятся в направлении движения часовой стрелки. При вещественных r, меньших, чем r_1, знак корня (9.68) должен быть отрицательным, в чём можно убедиться, исследуя поведение рассматриваемой функции вблизи r_1. Поэтому, записывая интегрируемую функцию в виде

$$-\sqrt{A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}},$$

получим

$$R_0=-\sqrt{-C},$$

где R_0 — вычет этой функции относительно начала координат.

При вещественном r, большем, чем r_2, знак рассматриваемого корня должен быть положительным, и поэтому вычет интегрируемой функции относительно точки ∞ можно получить с помощью обычного приёма замены переменной. Полагая $z=r^{-1}$, будем иметь

$$-\oint \frac{1}{z^2}\sqrt{A+2Bz-Cz^2}\,dz$$

и, разлагая этот радикал в ряд около точки $z=0$, получаем

$$R_\infty=-\frac{B}{\sqrt{A}}.$$

Интересующий нас интеграл равен сумме вычетов, умноженной на $-2\pi i$, следовательно,

$$J_r=2\pi i\left(\sqrt{-C}+\frac{B}{\sqrt{A}}\right).$$

Подставляя сюда значения коэффициентов A, B, C, получаем

$$J_r=-(J_\theta+J_\varphi)+\pi k\sqrt{\frac{2m}{-E}}. \tag{9.69}$$

---

*) Для того чтобы представить себе это яснее, можно воспользоваться стереографической проекцией и перейти от комплексной плоскости к сфере Римана. Тогда началу координат плоскости r будет соответствовать южный полюс этой сферы, а точке ∞ — её северный полюс. (Вещественной оси будет соответствовать один из меридианов.) Любая замкнутая кривая C делит поверхность этой сферы на две части, и поэтому кривую C можно рассматривать как охватывающую любую из этих частей в зависимости от направления движения вдоль C.

Равенство (9.69) позволяет найти H как функцию переменных J, так как, разрешая его относительно E, будем иметь

$$H \equiv E = -\frac{2\pi^2 mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}. \tag{9.70}$$

Ранее мы говорили, что переменные J_θ и J_φ должны входить сюда в виде комбинации $J_\theta + J_\varphi$. Теперь мы видим, что все три переменные J входят сюда в виде комбинации $J_r + J_\theta + J_\varphi$. Следовательно, все частоты этого движения одинаковы и оно является *полностью вырождающимся.*

Полученный результат следовало ожидать заранее, так как мы знаем, что в случае силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, траектория движущейся точки является замкнутой (при $E < 0$). Поэтому изучаемое движение должно быть строго периодическим и, следовательно, полностью вырождающимся. Если бы центральная сила содержала член r^{-3} (вносимый релятивистскими поправками), то траектория была бы незамкнутой, а движение было бы непериодическим (оно совершалось бы по прецессирующему эллипсу). Одно из вырождений было бы в этом случае уничтожено, но движение всё еще было бы вырождающимся, так как равенство $\nu_\theta = \nu_\varphi$ справедливо для всех центральных сил.

Частота рассматриваемого движения определяется равенством

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{4\pi^2 mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^3}.$$

Подставляя сюда сумму $J_r + J_\theta + J_\varphi$ из равенства (9.70) и вычисляя затем период τ, получаем:

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}, \tag{9.71}$$

что совпадает с третьим законом Кеплера, выражаемым равенством (3.54) (если учесть, что $a = -k/2E$).

Вырождающиеся частоты можно исключить с помощью канонического преобразования, коротко описанного в предыдущем параграфе. Записывая условия вырождения в виде

$$\nu_\varphi - \nu_\theta = 0, \quad \nu_\theta - \nu_r = 0,$$

мы получаем образующую функцию

$$F = (w_\varphi - w_\theta) J_1' + (w_\theta - w_r) J_2' + w_r J_3', \tag{9.72}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= w_\varphi - w_\theta, \\ w_2' &= w_\theta - w_r, \\ w_3' &= w_r. \end{aligned}\right\} \tag{9.73}$$

Как и следовало ожидать, новые частоты ν_1' и ν_2' получаются равными нулю. Переменные J_i' можно получить, решая уравнения

$$J_\varphi = J_1',$$
$$J_\theta = J_2' - J_1',$$
$$J_r = J_3' - J_2'.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} J_1' &= J_\varphi, \\ J_2' &= J_\varphi + J_\theta, \\ J_3' &= J_\varphi + J_\theta + J_r. \end{aligned}\right\} \tag{9.74}$$

Выражая теперь гамильтониан H через новые переменные, получаем

$$H = -\frac{2\pi^2 m k^2}{J_3'^2}, \tag{9.75}$$

причём сюда входит лишь та из переменных J_i', для которой частота ν_i' отлична от нуля.

Вычисление угловых переменных w_i можно произвести с помощью уравнений

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}. \tag{9.76}$$

Интегрируя для этого уравнения (9.63), мы можем получить W как функцию констант p, p_φ и E и, следовательно, как функцию переменных J. Подставив эту функцию в равенство (9.76), мы можем получить затем соотношение между w и константами движения, чем и определится физический смысл величин w. Практически, однако, этот путь оказывается весьма длинным. К счастью, здесь можно высказать некоторые качественные соображения, достаточные для выяснения смысла постоянных угловых координат w_1' и w_2'. Мы знаем, что действие J_1' равно произведению 2π на составляющую кинетического момента вдоль полярной оси z, и, следовательно, соответствующая ему угловая переменная должна быть некоторым фиксированным углом в экваториальной плоскости. Одним из таких углов является угол, определяющий положение линии узлов (линия пересечения плоскости орбиты с экваториальной плоскостью), и поэтому w_1' может отличаться от него только на некоторую постоянную. (Значение этой постоянной может быть найдено с помощью непосредственного интегрирования.)

Аналогично, $J_2' = J_\theta + J_\varphi = 2\pi p$ и, следовательно, эта величина пропорциональна полному кинетическому моменту. Поэтому w_2' будет некоторым фиксированным углом в плоскости орбиты, таким, как, например, угол между перигелием и линией узлов. Следует заметить также, что отношение J_1'/J_2' должно равняться косинусу угла между осью z и вектором кинетического момента. Таким образом, величины w_1', w_2' и J_1'/J_2', в сущности, являются углами Эйлера, определяющими ориентацию орбиты в пространстве.

Введение переменных действие — угол не приводит, конечно, к наиболее быстрому решению задачи Кеплера, и с этой точки зрения практическая польза этого метода представляется спорной. Однако система переменных w', J' может служить для того, чтобы определить положение орбиты в пространстве. Кроме того, с помощью переменных J_i' можно указать также размер орбиты и её форму (т. е. длину главной полуоси и величину эксцентриситета). Поэтому рассматриваемые переменные особенно удобны при изучении орбит планет, в связи с чем они находят применение в астрономии, где переменные w', J' известны под названием *элементов Делоне* орбиты (Delaunay elements). Когда в движении участвуют только два тела, то эти элементы являются константами движения (за исключением w_3'). Но если имеются небольшие возмущения, вызванные, например, другими планетами или спутниками данной планеты, то движение получается более сложным, хотя часто можно считать, что рассматриваемое движение характеризуется этими же элементами, но медленно изменяющимися во времени. В этих случаях переменные w', J' оказываются весьма полезным инструментом для изучения таких возмущений.

В течение долгого времени переменные действие — угол применялись только в астрономии. Однако положение резко изменилось с появлением квантовой теории атома Бора, так как при этом было установлено, что квантовые соотношения проще всего получаются как раз с помощью переменных J.

В классической механике значения переменных J могут изменяться в непрерывном диапазоне. Однако в квантовой механике это не имеет места, так как квантовые условия Зоммерфельда и Вильсона требуют, чтобы движение ограничивалось теми орбитами, для которых «истинные» переменные J имеют значения nh, где h — квант действия, а n — любое целое число. (Переменные J считаются «истинными», если соответствующие частоты не вырождаются и отличны от нуля; такой переменной является, например, J_3'.) Как показал Зоммерфельд, переменные действие — угол открывают широкие возможности для квантования, так как при этом требуется лишь решить соответствующую задачу классической механики и, заменяя затем J на nh, произвести квантование.

В качестве примера мы рассмотрим квантование энергетических уровней атома водорода. Оно сразу получается из равенства (9.75), если положить там $k = Ze^2$ и $J_3' = nh$:

$$E = -\frac{2\pi^2 mZ^2e^4}{n^2h^2}, \tag{9.77}$$

где n — так называемое *главное квантовое число*. В случае полностью вырождающейся системы оно является единственным квантовым числом. Положение, однако, изменится, если ввести релятивистские поправки, учитывающие прецессию перигелия в плоскости орбиты. Тогда угол w_2', определяющий положение этого перигелия, будет изменяться со временем, и переменная J_2' станет «истинной», вследствие чего её тоже нужно будет квантовать, полагая

$$J_2' = kh,$$

где k — *радиальное* квантовое число. Так как частоты ν_3' и ν_2' отличны от нуля, то энергия E будет теперь зависеть как от J_3', так и от J_2', т. е. от n и от k. Таким путём можно построить известную релятивистскую теорию энергетических уровней атома водорода.

Для того чтобы полностью устранить вырождение, можно ввести однородное магнитное поле, направленное вдоль произвольной оси, скажем, оси z. Плоскость орбиты будет тогда совершать прецессию Лармора (Larmor) вокруг этой оси, и угол w_1' будет равномерно увеличиваться. Поэтому J_1' будет «истинной» переменной действия, и должно будет выполняться равенство

$$J_1' = mh,$$

где m — *магнитное* квантовое число. Поэтому энергия будет теперь зависеть от всех трёх квантовых чисел, в результате чего мы получим эффект Зеемана, состоящий в расщеплении спектральных линий *).

В период развития старой квантовой теории переменным действие — угол уделялось много внимания, так как они представляли эффективный метод теоретического исследования. Но когда после атома водорода стали рассматривать более сложные системы, положение изменилось, так как пришлось учитывать много дополнительных сил. С этой целью из классической механики был заимствован метод расчёта малых возмущений, и поэтому между классическими и квантовыми методами расчёта таких возмущений имеется много сходства. Следует, однако, отметить, что методы классической механики являются значительно более сложными, особенно в случаях вырождения.

Скоро, однако, стало ясно, что, помимо математических трудностей, здесь имеются и принципиальные, так как квантовая теория Бора недостаточно правильно отражает физическую природу явлений. Как известно, выход был найден благодаря созданию (почти одновременно) волновой механики и матричной механики. Но так

---

*) Получаемое таким способом расщепление представляет лишь нормальный эффект Зеемана. Аномальный эффект Зеемана требует, конечно, учёта влияния «спина».

как методы решения квантовых задач были в этих теориях совершенно различными, то интерес к переменным действие — угол резко уменьшился. В настоящее время они употребляются только в астрономии (т. е. в классической механике); в квантовой механике сохранились лишь некоторые из понятий, связанных с этими переменными, такие, например, как вырождение.

Хотя это может показаться странным, но новая волновая механика также связана с теорией Гамильтона — Якоби. Подобно тому как зародышем матричной механики являются классические скобки Пуассона, зародыш волновой механики можно увидеть в связи метода Гамильтона — Якоби с геометрической оптикой. К рассмотрению этой связи мы сейчас и перейдём.

§ 9.8. Геометрическая оптика и волновая механика. Мы будем рассматривать только такие системы, гамильтониан которых является полной энергией. Тогда между функциями S и W будет иметь место соотношение

$$S(q,\ P,\ t) = W(q,\ P) - Et. \tag{9.78}$$

Так как характеристическая функция W не зависит от t, то поверхности $W = \text{const}$ в пространстве конфигураций занимают фиксированные положения. Что касается поверхностей $S = \text{const}$, то в любой момент t каждая такая поверхность совпадает с некоторой поверхностью $W = \text{const}$. Однако значение W, соответствующее заданному значению S, будет изменяться со временем в соответствии с равенством (9.78). Рассмотрим, например, поверхности $S = a$ и $S = b$. В момент $t = 0$ они будут совпадать с поверхностями $W = a$ и $W = b$ (рис. 66). Однако спустя некоторое время dt поверхность $S = a$ будет совпадать с поверхностью $W = a + E\,dt$, а поверхность $S = b$ — с поверхностью $W = b + E\,dt$. Следовательно, за время dt поверхность $S = a$ переходит из положения $W = a$ в положение $W = a + E\,dt$. Таким образом, движение поверхности $S = a$ подобно распространению фронта некоторой волны, например, волны давления. Это позволяет рассматривать её как *фронт волны, распространяющейся в пространстве конфигураций.*

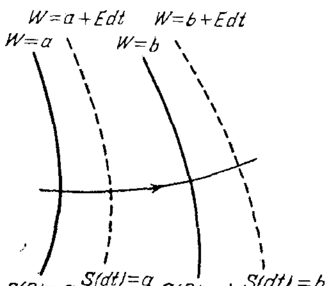

Рис. 66. Движение поверхностей $S = \text{const}$ в пространстве конфигураций.

В общем случае каждая поверхность $S = \text{const}$ изменяет свою форму при возрастании t. Следовательно, скорость волны, т. е. скорость, с которой движется такая поверхность, будет в разных её точках различной. Вычислим эту скорость в простейшем случае, когда рассматриваемая система состоит всего из одной точки.

В качестве обобщённых координат этой точки мы возьмём её декартовы координаты, и тогда пространство конфигураций будет тем трёхмерным пространством, в котором движется точка. Скорость волны в некоторой точке поверхности $S=\mathrm{const}$ равна

$$u=\frac{ds}{dt}, \tag{9.79}$$

где ds — расстояние, которое волна проходит за время dt в направлении, перпендикулярном к S. Но за время dt фронт волны переходит от поверхности W к поверхности $W+dW$, где $dW=E\,dt$. Кроме того, dW связано с ds соотношением

$$dW=|\nabla W|\,ds. \tag{9.80}$$

Поэтому

$$u=\frac{ds}{dt}=\frac{E}{|\nabla W|}. \tag{9.81}$$

Для вычисления $|\nabla W|$ следует обратиться к уравнению Гамильтона — Якоби, согласно которому

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]+V=E, \tag{9.82}$$

или

$$(\nabla W)^2=2m(E-V). \tag{9.83}$$

Следовательно, скорость волны равна

$$u=\frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}, \tag{9.84}$$

и так как разность $E-V$ равна кинетической энергии T, то формулу (9.84) можно записать в виде

$$u=\frac{E}{\sqrt{2mT}}. \tag{9.85}$$

Учитывая теперь, что рассматриваемая система состоит из одной точки, будем иметь:

$$2mT=m^2v^2=p^2,$$

и поэтому

$$u=\frac{E}{p}=\frac{E}{mv}. \tag{9.85'}$$

Равенство (9.85′) показывает, что скорость поверхности $S=\mathrm{const}$ обратно пропорциональна скорости точки, движение которой описывается с помощью S. Кроме того, легко показать, что траектория этой точки обязательно должна быть нормальной к поверхностям $S=\mathrm{const}$. Это следует из того, что направление траектории определяется направлением вектора $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$. Но согласно (9.21)

$$\boldsymbol{p}=\nabla W, \tag{9.86}$$

а вектор ∇W перпендикулярен к поверхности $W = \text{const}$, т. е. к поверхности $S = \text{const}$. Таким образом, семейство поверхностей $W = \text{const}$ определяет систему траекторий возможного движения, так как они нормальны к поверхностям этого семейства. Когда точка движется вдоль одной из возможных траекторий, поверхности S тоже движутся, но эти движения оказываются не «синхронными», так как при увеличении скорости v скорость u уменьшается и наоборот.

Проведённые рассуждения относились к системе, состоящей из одной точки. Однако бóльшая часть полученных нами результатов будет иметь место и для системы, состоящей из многих точек, но метрику пространства конфигураций нужно будет определять тогда формулой

$$d\rho^2 = 2T\,dt^2,$$

где $d\rho$ — элемент длины [см. уравнение (7.42)]. Вместо истинной траектории точки мы будем рассматривать траекторию изображающей точки в пространстве конфигураций, а скорость поверхности S будет определяться равенством *)

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}} = \frac{E}{\sqrt{2T}}, \tag{9.84'}$$

подобным равенству (9.84). Следует напомнить, что скорость изображающей точки пропорциональна $\sqrt{T}$ (см. § 7.5). Поэтому между скоростью волны и скоростью изображающей точки здесь будет иметь место соотношение, подобное ранее полученному, а возможные траектории изображающей точки будут, по-прежнему, нормальны к поверхностям $S = \text{const}$. Следовательно, переход к системам из многих точек не приносит каких-либо новых физических результатов, и для упрощения математической стороны вопроса мы и в дальнейшем будем рассматривать движение одной точки.

Поверхности $S = \text{const}$ мы рассматривали как последовательные состояния фронта волны и, исходя из этого представления, говорили о скорости её распространения. Однако мы совершенно не рассматривали вопроса о природе этих волн и поэтому ничего не можем сказать о таких важных понятиях, как частота или длина волны. Чтобы пролить свет на эти вопросы, мы начнём с рассмотрения хорошо известного волнового процесса, а именно движения световых волн.

Уравнение, описывающее распространение световой волны, имеет вид

$$\nabla^2\varphi - \frac{n^2}{c^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \tag{9.87}$$

---

*) Движение поверхностей S в пространстве конфигураций рассмотрено в книге L. Brillouin, Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité, гл. VIII.

где φ — скалярная величина, такая, например, как скалярный электромагнитный потенциал. Величина c означает здесь скорость света в пустоте, а n — коэффициент преломления, равный отношению c к скорости света в данной среде. В общем случае коэффициент n является некоторой функцией x, y, z. Если n постоянно, то одним из решений уравнения (9.87) является функция

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}, \tag{9.88}$$

описывающая распространение плоской волны. Волновое число k и частота ω связаны при этом соотношением

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c}. \tag{9.89}$$

Направляя для простоты $\boldsymbol{k}$ вдоль оси z, будем иметь:

$$\varphi = \varphi_0 e^{ik_0(nz - ct)}, \tag{9.90}$$

где k_0 — волновое число в пустоте.

Пусть теперь n будет изменяться с изменением x, y, z. Тогда плоская волна (9.90) уже не будет удовлетворять уравнению (9.87), так как коэффициент преломления будет неодинаковым, что приведёт к искажению формы этой волны. Мы, однако, будем считать, что n не сильно изменяется от точки к точке, и решение уравнения (9.87) будем искать в виде

$$\varphi = e^{A(\boldsymbol{r}) + ik_0[L(\boldsymbol{r}) - ct]}, \tag{9.91}$$

подобном (9.90). Величины A и L являются здесь вещественными функциями $\boldsymbol{r}$, подлежащими определению. Первая из них характеризует амплитуду волны. Если бы n было постоянно, то L равнялось бы nz и называлось бы *оптической длиной траектории* или фазой волны. Часто её называют ещё *эйконалом*.

Вычисляя теперь $\nabla\varphi$ и $\nabla^2\varphi$, будем иметь:

$$\nabla\varphi = \varphi\nabla(A + ik_0L)$$

и

$$\nabla^2\varphi = \varphi\,[\nabla^2(A + ik_0L) + \{\nabla(A + ik_0L)\}^2]$$

или

$$\nabla^2\varphi = \varphi\,[\nabla^2A + ik_0\nabla^2L + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + 2ik_0\nabla A\cdot\nabla L],$$

и волновое уравнение примет вид

$$ik_0[2\nabla A\cdot\nabla L + \nabla^2L]\,\varphi + [\nabla^2A + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + n^2k_0^2]\,\varphi = 0. \tag{9.92}$$

Но так как A и L являются вещественными, то для выполнения этого равенства необходимо, чтобы каждая из квадратных скобок была равна нулю. Таким образом, мы приходим к двум следующим уравнениям:

$$\nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2 [n^2 - (\nabla L)^2] = 0, \qquad (9.93a)$$

$$\nabla^2 L + 2\nabla A \cdot \nabla L = 0. \qquad (9.93b)$$

Так как мы не делали ещё никаких приближений, то эти уравнения являются точными. Теперь мы сделаем предположение, что коэффициент n столь медленно изменяется с расстоянием, что на расстояниях порядка длины волны этим изменением можно пренебречь. Иначе говоря, это означает, что длина волны мала по сравнению с величиной расстояния, на котором проявляется неоднородность среды. Как известно, это предположение составляет основу *геометрической оптики*. Если принять указанное предположение, то член, содержащий $k_0^2 = 4\pi^2/\lambda_0^2$, будет доминирующим членом уравнения (9.93a), и это уравнение примет следующий простой вид:

$$(\nabla L)^2 = n^2. \qquad (9.94)$$

Полученное нами уравнение известно в геометрической оптике как *уравнение эйконала*. Определяемые им поверхности $L = \text{const}$ являются поверхностями постоянной фазы и, следовательно, определяют фронт волны. Все световые лучи будут перпендикулярны к этим поверхностям и, следовательно, тоже будут определяться уравнением (9.94).

Дальше нам нет необходимости углубляться в подробности геометрической оптики, так как мы видим, что уравнение (9.94) подобно уравнению (9.83), являющемуся уравнением Гамильтона — Якоби для характеристической функции W. Таким образом, мы имеем аналогию, в которой W играет роль эйконала L, а $[2m(E-V)]^{1/2}$ — коэффициента преломления n. Поэтому *классическую механику можно рассматривать как аналог геометрической оптики*, в котором роль поверхностей движущейся волны и ортогональных к ним световых лучей играют поверхности $S = \text{const}$ и ортогональные к ним траектории движения. Отсюда ясно, почему волновая теория Гюйгенса и корпускулярная теория Ньютона одинаково хорошо объясняли явления отражения и преломления: в рамках геометрической оптики между этими теориями имеется формальная аналогия.

Мы уже отмечали, что принцип наименьшего действия имеет сходство с принципом Ферма в геометрической оптике. Теперь это сходство становится понятным. Согласно (7.40) принцип наименьшего действия можно записать в виде

$$\Delta \int \sqrt{2mT}\, ds = 0,$$

а мы знаем, что корень $\sqrt{2mT}$ пропорционален коэффициенту преломления или обратно пропорционален скорости волны в соответствующем волновом движении. Следовательно, аналог принципа наименьшего действия должен иметь вид

$$\Delta \int n\, ds = \Delta \int \frac{ds}{u} = 0, \tag{9.95}$$

что представляет два хорошо известных варианта принципа Ферма для пути светового луча.

Мы ещё не нашли тех величин, которые играют в классической механике роль частоты и длины волн. Единственное, что мы пока установили, это то, что искомая длина волны должна быть значительно меньше того расстояния, на котором становится заметной неоднородность силового поля. Дальше этого мы, естественно, не могли идти, так как, будучи аналогом геометрической оптики, классическая механика является той областью, в которой не встречаются эффекты, зависящие от длины волны (интерференция, диффракция и т. п.). Поэтому, хотя двойственность «частица — волна» имеет место и в классической механике, однако волновой концепции здесь не предоставляется случая обнаружить своё преимущество перед корпускулярной.

Тем не менее, можно попытаться написать волновое уравнение, для которого уравнение Гамильтона — Якоби является своего рода пределом при $\lambda \to 0$. Сходство между уравнениями (9.94) и (9.83) не означает, конечно, что величине L должно соответствовать именно W, так как оно может соответствовать величине, пропорциональной L. Мы увидим, что коэффициент пропорциональности является здесь мерой длины волны. Из соответствия между L и W следует, что $S = W - Et$ должно быть пропорционально фазе колебания

$$k_0 (L - ct) = 2\pi \left(\frac{L}{\lambda_0} - \nu t\right)$$

[см. равенство (9.91)]. Следовательно, энергия E и частота ν должны быть пропорциональны, и поэтому можно написать

$$E = h\nu. \tag{9.96}$$

Но длина волны связана с частотой соотношением

$$\lambda\nu = u,$$

откуда с учётом (9.85′) получаем

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{E}{p} : \frac{E}{h},$$

т. е.

$$\lambda = \frac{h}{p}. \tag{9.97}$$

Уравнение (9.87) можно записать в виде

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{u^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

где u — скорость световой волны в среде с показателем преломления n. Если заменить здесь φ на $\varphi e^{-i\omega t}$, то это уравнение примет вид

$$\nabla^2\varphi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\varphi = 0, \tag{9.98}$$

что представляет собой волновое уравнение, не содержащее времени. Величина φ является здесь амплитудой колебания, и в волновой механике ей должна соответствовать некоторая величина ψ, удовлетворяющая уравнению такого же типа, как уравнение (9.98). Но λ равно теперь h/p, где $p = \sqrt{2m(E-V)}$. Следовательно, волновое уравнение, для которого W является эйконалом, должно иметь вид

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi = 0. \tag{9.99}$$

Равенство (9.99) выражает известное уравнение волновой механики — уравнение Шрёдингера.

Из формулы (9.97) видно, что длина волны прямо пропорциональна коэффициенту h. Поэтому, чем меньше h, тем меньше длина волны и тем теснее связь с геометрической оптикой.

Эквивалентность уравнений Гамильтона — Якоби и эйконала была установлена Гамильтоном в 1834 г., а соответствующее волновое уравнение было получено Дебройлем и Шрёдингером в 1926 г. Иногда высказывают мнение, что если бы Гамильтон пошёл немного дальше, то он получил бы уравнение Шрёдингера. Это, однако, не так, ибо для такой экстраполяции он нуждался в достаточном экспериментальном материале. В то время, когда жил Гамильтон, классическая механика считалась абсолютно верной, и не было оснований для экспериментальной проверки её с целью уточнения и создания более общей теории. Другими словами, Гамильтон не имел основания считать, что h отлично от нуля. Тот факт, что классическая механика является лишь приближением волновой механики и что это приближение представляет своего рода «геометрическую оптику», стал ясен значительно позже, когда были обнаружены эффекты, зависящие от длины волны частицы [например, в интерференционных опытах Дэвиссона (Davisson) и Гермера (Germer)]. Только после этого можно было приписать определённый физический смысл величине h, являющейся известной постоянной Планка *).

*) Аналогичное положение имело место и в волновой теории света. Пока не были обнаружены явления интерференции и диффракции, волновая теория Гюйгенса не имела преимуществ по сравнению с корпускулярной теорией Ньютона.

Теперь мы видим, что классическая механика содержит в себе зёрна квантовой механики и что уравнение Гамильтона — Якоби особенно удобно для перехода от первой из них ко второй. Дальнейшее углубление в эти вопросы вывело бы нас за рамки данной книги, которую с достаточным основанием можно назвать «Геометрической оптикой волновой механики».

Задачи

1. Уравнение (9.3), определяющее функцию S, было получено нами с помощью канонического преобразования, осуществляющего переход от канонических координат (q, p) к постоянным (α, β). Покажите, что верно и обратное, т. е. если $S(q_i, \alpha_i, t)$ есть любой полный интеграл уравнения (9.3), то определяемые равенствами (9.6) и (9.7) переменные (q_i, p_i) будут каноническими и, следовательно, будут удовлетворять уравнениям Гамильтона.

2. Решите задачу о движении материальной точки в однородном гравитационном поле, пользуясь методом Гамильтона — Якоби. Найдите также уравнение её траектории.

3. Рассмотрите задачу о тяжёлом симметричном волчке с одной неподвижной точкой, пользуясь методом Гамильтона — Якоби. Получите для неё формальное решение (5.56).

4. Найдите собственные частоты гармонического осциллятора с тремя степенями свободы, пользуясь переменными действие — угол и считая, что коэффициенты сил, действующих вдоль каждой из осей, являются различными.

5. (a) Покажите, что при малой амплитуде колебаний энергия простого маятника равна

$$E = J\nu.$$

(b) Рассмотрите маятник, состоящий из тяжёлой точки, подвешенной на нити, проходящей через отверстие. Предположим, что нить втягивается через отверстие, вследствие чего длина маятника уменьшается, причём это происходит настолько медленно, что в каждый момент времени ещё можно говорить об определённом периоде колебания. Вычислите работу, которая затрачивается при этом на преодоление натяжения нити, и найдите таким путём изменение энергии маятника. Покажите, что переменная $J = E/\nu$ будет при этом оставаться постоянной.

Изменение внешних параметров системы со скоростью, малой по сравнению с собственной частотой, называют *адиабатическим изменением*. Поэтому переменная J в этом маятнике будет *адиабатическим инвариантом*. Вообще, можно доказать, что если система не вырождается, то переменные J_i являются адиабатическими инвариантами, т. е. не изменяются под действием медленного изменения внешних условий. Заметим, что в квантовых процессах каждое состояние системы также является адиабатическим инвариантом, так как медленное изменение внешних параметров не приводит к переходу из одного состояния в другое. Это даёт ещё одно указание на целесообразность пользования переменными J_i при описании квантования системы.

6. (a) Пусть гармонический осциллятор задачи 4 будет полностью вырождающимся, т. е. все его частоты будут одинаковыми (изотропный осциллятор). Получите для него «истинные» переменные и выразите его энергию только через одну переменную J.

(b) Решите задачу об изотропном осцилляторе, пользуясь переменными действие — угол (J, w) и применяя сферические координаты. Получите «истинные» переменные (J, w) и сравните полученный результат с результатом задачи (a). Будут ли эти две системы переменных одинаковыми? Каков их физический смысл? (Эта задача показывает, что в случае вырождающегося движения разделение переменных возможно более чем в одной системе обобщённых координат. В случае невырождающегося осциллятора разделение переменных можно произвести в декартовых координатах и нельзя произвести в полярных.)

7. В случае вырождающегося плоского движения гармонического осциллятора разделение переменных возможно в любой декартовой системе координат. Получите соотношения между переменными действие — угол, соответствующими двум декартовым системам координат, образующим друг с другом угол θ. (Заметим, что рассматриваемое преобразование переменных (J, w) *не является* ортогональным.)

8. Вычислите элементарными методами интеграл (9.68) из задачи Кеплера.

9. Интегрируя каждое из уравнений Гамильтона — Якоби в задаче Кеплера, получите W в виде суммы трёх интегралов. Из соотношений

$$w'_i = \frac{\partial W}{\partial J'_i}$$

получите затем интегральные выражения для трёх угловых переменных. Покажите, что с точностью до аддитивной постоянной углы w'_1 и w'_2 имеют смысл азимута линии узлов и угла между линией узлов и радиусом-вектором перигелия. При интерпретировании получающихся интегралов удобно отношение J'_1/J'_2 заменить на $\cos\alpha$, где α — угол между плоскостью орбиты и полярной осью z.

10. Уравнение орбиты в задаче Кеплера можно получить с помощью равенства (9.29b), выражая $\alpha_1 = E$ и $\alpha_\varphi = l$ через J'_2 и J'_3. (Обратите внимание на изменение смысла угла φ.) Выполните необходимое интегрирование и получите уравнение орбиты, а также покажите, что

$$a = \frac{J'^2_3}{4\pi^2 mk}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{J'_2}{J'_3}},$$

где a — главная полуось орбиты, а ε — её эксцентриситет.

11. Рассмотрите релятивистскую задачу Кеплера, пользуясь переменными действие — угол и гамильтонианом (7.20). Покажите, в частности, что полная энергия движущейся точки (включая энергию покоя) определяется равенством

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4\pi^2 k^2}{\left[(J'_3 - J'_2)\, c + \sqrt{J'^2_2 c^2 - 4\pi^2 k^2}\,\right]^2}}}.$$

(Заметим, что вырождение здесь частично уменьшается, так как орбита перестает быть замкнутой, хотя остаётся ещё плоской.) Покажите, что при $c \to \infty$ мы приходим к равенству (9.75).

Рекомендуемая литература

M. Born, The Mechanics of the Atom.

По сравнению с большей частью книг, на которые мы ссылались в предыдущей главе, книга Борна выделяется обилием материала по применению метода Гамильтона — Якоби и переменных действие — угол. Много-периодические движения и теория возмущённого движения изложены здесь, несомненно, полнее, чем в других книгах на эту тему, написанных на английском языке.

A. Sommerfeld, Atomic Structure and Spectral Lines.

Метод Гамильтона — Якоби и переменные действие — угол изложены в этой книге значительно менее подробно, чем в книге Борна. (Вероятно, поэтому рассматриваемые вопросы часто оказываются более лёгкими для чтения.) Особо следует отметить изложение вопроса о связи вырождающихся движений с разделением переменных. В приложении к этой книге производится вычисление интегралов из задачи Кеплера с помощью теории вычетов (что, впрочем, делается и в книге Борна).

J. H. Van Vleck, Quantum Principles and Line Spectra.

В главе «Mathematical Techniques» автор этой книги коротко рассматривает метод Гамильтона — Якоби и переменные действие — угол, а также основы теории возмущений. Большая часть материала остальной части книги интересна лишь в историческом отношении.

E. Fues, Störungsrechnung, т. V. Handbuch der Physik.

Предшествующая статья этого тома, написанная Л. Нордхеймом и Е. Фюзом и озаглавленная «Hamilton — Jacobische Theorie», касается теории Гамильтона — Якоби, в сущности, лишь в последних разделах. Помимо некоторых общих положений этого метода, здесь коротко рассматривается вопрос о возможности разделения переменных. Статья Фюза является в этом отношении более полной. В ней подробно рассматривается много-периодическое движение и вводятся переменные действие — угол. Кроме того, в ней подробно рассмотрена задача Кеплера (исключая комплексное интегрирование). Больше половины этой статьи посвящено теории возмущений, при изложении которой ясно раскрывается вся сложность этой теории по сравнению с теорией квантовых возмущений.

P. Frank, Die Differential Gleichungen allgemeiner Mechanischer Systeme, т. 2 книги Frank und von Mises, Die Differential- und Integralgliechungen der Mechanik und Physik *).

Эта глава представляет компактное изложение всей механики на весьма высоком уровне. В отношении вопросов, изложенных нами в настоящей главе, известный интерес представляют здесь §§ 4—7. Особенно ценным является весьма общее изложение вопроса о системах с разделяющимися переменными, которое проводится в § 5 и основывается на работе Штеккеля (Staeckel). Имеется некоторый материал по вопросу о связи теории Гамильтона — Якоби с геометрической оптикой. Предыдущая глава книги содержит подробное изложение геометрической оптики на основе уравнения Гамильтона — Якоби для одной точки.

C. Carathéodory, Variationsrechnung.

В этой книге рассматривается связь между теорией Гамильтона и общей теорией уравнений первого порядка в частных производных. Из изложения этого вопроса видно, что уравнение Гамильтона — Якоби играет в этой связи существенную роль. Подробное рассмотрение этих вопросов даётся здесь в связи с так называемой теорией «характеристик».

C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels.

В этой книге рассматривается применение метода Гамильтона — Якоби в небесной механике. В главе 2 рассматривается много-периодическое движение, а в главах 6 и 7 — теория возмущений и применение её к проблеме трёх тел. Более полное в математическом отношении исследование этих вопросов можно найти в книге H. Poincaré, Les Methodes Nouvelles de Mécanique Céleste.

L. Brillouin, Les Tenseurs en Méchanique et en Élasticité.

В главе VIII этой книги подробно рассмотрено движение поверхностей S-const в пространстве конфигураций. В главе IX рассмотрена связь между классической механикой, геометрической оптикой и волновой механикой.

---

*) Имеется русский перевод: Франк П. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, Л.—М., 1937.

ГЛАВА 10

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В предыдущей главе мы рассматривали системы, движение которых можно описать с помощью ряда Фурье, содержащего основные частоты ν_i и все линейные комбинации этих частот. Важным частным случаем такого движения являются колебания столь малой амплитуды, что при этом возбуждаются только основные частоты, а более высокие гармоники практически не проявляются. Переменные действие — угол оказываются в этом случае не вполне подходящими, и поэтому здесь применяются специальные методы, являющиеся более элементарными. Теория малых колебаний находит широкое применение в акустике и теории молекулярных спектров, а также при изучении взаимодействующих электрических контуров. Кроме того, она подготавливает путь для перехода к механике непрерывных систем и полей, которые мы рассмотрим в следующей главе.

Мы будем рассматривать те колебания, которые возникают при небольших отклонениях системы от состояния устойчивого равновесия (хотя вообще можно рассматривать и такие колебания, которые возникают при небольших отклонениях от режима устойчивого движения).

§ 10.1. Постановка задачи. Рассмотрим системы, потенциал которых является функцией только координат их точек. Уравнения, связывающие обобщённые координаты $q_1, \ldots, q_n$ с декартовыми, будем считать не содержащими времени, т. е. исключим из рассмотрения связи, зависящие от времени. Мы будем говорить, что система находится *в равновесии*, если действующие на неё обобщённые силы равны нулю, т. е. если

$$Q_i = \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0. \qquad (10.1)$$

Следовательно, при равновесии потенциальная энергия системы имеет экстремум. Если начальная конфигурация системы является равновесной и её начальные скорости равны нулю, то она и дальше будет оставаться в равновесии. Примером механической системы, находящейся в равновесии, может служить висящий маятник, лежащее на столе яйцо, или баллистический гальванометр в нулевом положении. Можно было бы привести и много других примеров.

Равновесие называют *устойчивым*, если движение, получающееся в результате небольшого возмущения, не выходит из небольшой окрестности первоначальной конфигурации системы. Если же при бесконечно малом возмущении система начинает неограниченно удаляться от первоначальной конфигурации, то равновесие называют *неустойчивым*. Покоящийся маятник может служить примером системы, находящейся в устойчивом равновесии, а яйцо, поставленное на один из своих концов, — примером системы, находящейся

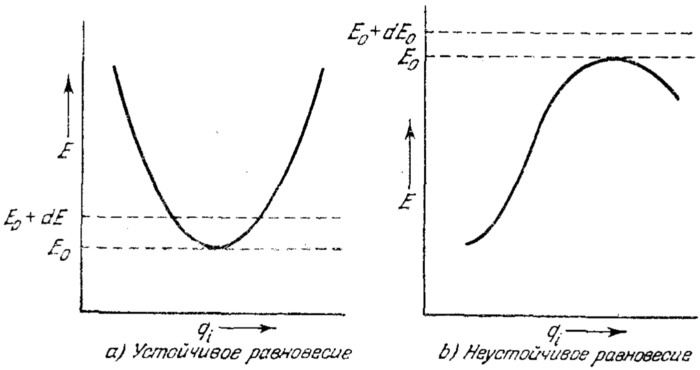

Рис. 67. Кривые потенциальной энергии вблизи положения равновесия.

в неустойчивом равновесии. Легко видеть, что если экстремум функции V будет минимумом, то равновесие будет устойчивым. Для доказательства предположим, что система отклоняется от положения равновесия и энергия её увеличивается при этом на dE. Но так как в положении равновесия V имеет минимум, то любое отклонение от этого положения вызывает увеличение V. Поэтому на основании закона о сохранении энергии можно сделать вывод, что если бы эта система продолжала отклоняться от равновесия, то скорости её уменьшались бы и в конце концов обратились бы в нуль. Это указывает на ограниченность движения такой системы.

Если же некоторые отклонения от равновесия приводят к уменьшению V, то они будут вызывать увеличение кинетической энергии системы и, следовательно, скоростей её точек. Этот случай соответствует неустойчивому движению. О характере равновесия системы можно судить на основании графика кривой потенциальной энергии (рис. 67).

Более строгое математическое доказательство минимальности V в случае устойчивого равновесия будет дано в ходе последующих рассуждений.

Нас будет интересовать движение системы непосредственно вблизи положения устойчивого равновесия. Поэтому отклонения от этого положения мы будем считать малыми и, раскладывая различные функции в ряд Тейлора около этого положения, будем оставлять лишь члены низшего порядка. Положим

$$q_i = q_{0i} + \eta_i, \tag{10.2}$$

где q_{0i} — значения координат q_i в положении равновесия. Принимая η_i за новые обобщённые координаты и раскладывая V в ряд около q_{0i}, получаем

$$V(q_1, \ldots, q_n) = V(q_{01}, \ldots, q_{0n}) + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \ldots, \tag{10.3}$$

где согласно (10.1) члены, пропорциональные η_i, обращаются в нуль. Что касается члена $V(q_{01}, \ldots, q_{0n})$, то, отсчитывая потенциальную энергию системы от её положения равновесия, его тоже можно сделать равным нулю. Тогда в качестве первого приближения для V получим

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j, \tag{10.4}$$

где через V_{ij} обозначены производные $\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$, зависящие только от равновесных значений q_i. Отсюда следует, что $V_{ij} = V_{ji}$.

Аналогичным образом можно разложить в ряд и кинетическую энергию. Так как связь между обобщёнными и декартовыми координатами не содержит в данном случае t, то кинетическая энергия системы будет однородной квадратичной функцией скоростей $\dot{q}_i$ [см. уравнение (1.62)]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \tag{10.5}$$

где коэффициенты m_{ij} — некоторые функции координат q_i. Раскладывая каждую из них в ряд Тейлора около положения равновесия, получаем

$$m_{ij}(q_1, \ldots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \ldots, q_{0n}) + \sum_k \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 \eta_k + \ldots$$

Так как равенство (10.5) является квадратичным относительно $\dot{\eta}_i$, то для того чтобы получить первое (отличное от нуля) приближение для T, нужно в этих рядах опустить все члены, кроме первых.

Таким образом, обозначая постоянные $m_{ij}(q_{01}, \ldots, q_{0n})$ через T_{ij}, будем иметь

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \tag{10.6}$$

Постоянные T_{ij}, очевидно, также являются симметричными.

Согласно выражениям (10.4) и (10.6) лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j). \tag{10.7}$$

Поэтому, считая η_i обобщёнными координатами, мы получаем следующие n уравнений движения:

$$\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0 \tag{10.8}$$

(мы учли симметричность коэффициентов V_{ij} и T_{ij}). Каждое из уравнений (10.8) содержит, вообще говоря, все координаты η_i. Таким образом, мы будем иметь систему совместных дифференциальных уравнений, определяющих движение системы около положения равновесия.

§ 10.2. Собственные значения и преобразование главных осей. Уравнения движения (10.8) являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. В такой форме уравнения часто встречаются в теории электрических колебательных контуров. Поэтому решение их мы будем искать в виде

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}, \tag{10.9}$$

где Ca_i — комплексная амплитуда колебания, соответствующая координате η_i; коэффициент C введён нами для удобства как некоторый масштабный коэффициент, одинаковый для всех координат. Действительному движению отвечают, конечно, вещественные части функций (10.9). Подставив выражения (10.9) в уравнения движения (10.8), мы получим следующие уравнения для коэффициентов a_i:

$$\sum_j (V_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j) = 0. \tag{10.10}$$

Уравнения (10.10) образуют систему n линейных однородных уравнений с n неизвестными a_i и, следовательно, будут иметь нетривиальные решения лишь при выполнении условия

$$\begin{vmatrix} V_{11}-\omega^2T_{11} & V_{12}-\omega^2T_{12} & \ldots \\ V_{21}-\omega^2T_{21} & V_{22}-\omega^2T_{22} & \ldots \\ V_{31}-\omega^2T_{31} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.11)$$

Уравнение (10.11) является алгебраическим уравнением n-й степени относительно ω^2. Корни его определяют те частоты, при которых функции (10.9) могут служить решениями уравнений (10.8). Амплитуды a_i можно определить при этом из уравнений (10.10), которые при каждом из найденных значений ω^2 могут быть решены относительно a_i (точнее, все амплитуды a_i могут быть выражены через одну из них).

Для того чтобы получить правильное математическое представление, мы рассмотрим наиболее простой вариант общей задачи. Предположим, что обобщённые координаты системы являются декартовыми координатами её точек. Тогда кинетическая энергия системы будет содержать лишь квадраты составляющих её скоростей. Введём теперь новые обобщённые координаты, для чего каждую из декартовых координат разделим на корень квадратный из массы соответствующей точки. Тогда кинетическая энергия T будет равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_i \dot{\eta}_i^2, \qquad (10.12)$$

т. е. T_{ij} станет равным δ_{ij}. Поэтому однородные уравнения (10.10) упростятся и примут вид

$$\sum_j V_{ij}a_j = \lambda a_i, \qquad (10.13)$$

где $\lambda = \omega^2$. Но эти уравнения подобны тем, которые встречались нам в главах 4 и 5 при решении задачи о собственных значениях [см. уравнения (5.22)]. Единственная разница состоит лишь в том, что сейчас мы имеем дело не с трёхмерным пространством, а с n-мерным. Поэтому числа V_{ij} можно рассматривать как элементы матрицы V, состоящей из n строк и n столбцов, а числа a_i — как составляющие n-мерного вектора $\boldsymbol{a}$.

Систему уравнений (10.13) можно представить в виде одного векторного уравнения

$$\mathsf{V}\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a},$$

подобного уравнению (4.74). Уравнение (10.11) будет тогда вековым уравнением, определяющим собственные значения λ.

Так как матрица V симметрична и вещественна, то соответствующие собственные значения также будут вещественны (см. § 5.4). Если образовать матрицу A, составленную из n систем $\{a_i\}$, соответствующих n собственным значениям, то подобное преобразование, осуществляемое с помощью A, должно диагонализировать V (см. § 4.6). Кроме того, n собственных векторов $\boldsymbol{a}$ будут ортогональными и, следовательно, диагонализирующая матрица A также будет ортогональной.

Эти выводы справедливы не только в том частном случае, когда матрица из коэффициентов T_{ij} является диагональной; аналогичные результаты можно получить и в общем случае. Если числа T_{ij} рассматривать как элементы матрицы T, то систему уравнений (10.10) можно будет записать в виде векторного уравнения

$$\mathsf{V}\boldsymbol{a} = \lambda\mathsf{T}\boldsymbol{a}. \tag{10.14}$$

От обычного уравнения, определяющего собственные значения некоторой матрицы, оно отличается тем, что в правой части его стоит не λ, а $\lambda\mathsf{T}$. Мы сейчас рассмотрим соответствующие ему собственные значения, т. е. те значения λ, при которых это уравнение имеет нетривиальные решения. При этом покажем, что они будут вещественными (так как матрицы T и V являются эрмитовскими), и, кроме того, они должны быть положительными. Помимо этого, докажем, что собственные векторы $\boldsymbol{a}$ являются в известном смысле ортогональными, а составленная из них матрица A диагонализирует *как* T, *так* и V, приводя T к единичной матрице $\mathsf{1}$, а V — к матрице, по диагонали которой стоят собственные значения λ.

Поступая так же, как и в § 5.4, мы j-ю составляющую k-го собственного вектора обозначим через a_{jk}. Тогда при $\lambda = \lambda_k$ каждое из скалярных составляющих уравнения (10.14) будет иметь вид

$$\sum_j V_{ij} a_{jk} = \lambda_k \sum_j T_{ij} a_{jk}. \tag{10.15}$$

Составляя аналогичное уравнение для $\lambda = \lambda_l$ и заменяя в нём все члены на комплексно сопряжённые, получаем

$$\sum_i V_{ij} a^*_{il} = \lambda^*_l \sum_i T_{ij} a^*_{il}. \tag{10.16}$$

Умножим теперь равенство (10.16) на a_{jk} и просуммируем по j, а равенство (10.15) умножим на a^*_{il} и просуммируем по i. Вычитая затем из первого результата второй, получаем

$$0 = (\lambda_k - \lambda^*_l) \sum_{i,j} T_{ij} a_{jk} a^*_{il}. \tag{10.17}$$

Положим теперь $l = k$. Тогда будем иметь

$$(\lambda_k - \lambda^*_k) \sum_{i,j} T_{ij} a_{jk} a^*_{ik} = 0. \tag{10.18}$$

Покажем, что стоящая здесь сумма является вещественной и положительной. Разобьём для этого a_{jk} на вещественную и мнимую части, т. е. положим

$$a_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}.$$

Тогда сумму (10.18) можно будет записать в виде

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_{jk} a_{ik}^* = \sum_{i,j} T_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{ik} + \sum_{i,j} T_{ij} \beta_{jk} \beta_{ik} + i \sum_{i,j} T_{ij} (\beta_{jk} \alpha_{ik} - \beta_{ik} \alpha_{jk}),$$

где вследствие симметричности чисел T_{ij} последняя из написанных сумм обращается в нуль (так как при перемене местами индексов и j изменяется её знак). Следовательно, сумма

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_{jk} a_{ik}^*$$

является вещественной. Далее, из определения коэффициента T_{ij} [формула (10.6)] видно, что сумму $\sum\limits_{i,j} T_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{ik}$ можно рассматривать как удвоенную кинетическую энергию системы при $\dot{\eta}_i = \alpha_{ik}$, а сумму $\sum\limits_{i,j} T_{ij} \beta_{jk} \beta_{ik}$ — как удвоенную кинетическую энергию при $\dot{\eta}_i = \beta_{ik}$. Но при любых вещественных скоростях кинетическая энергия положительна. Следовательно, фигурирующая в (10.18) сумма не может равняться нулю, и поэтому собственные значения λ_k должны быть вещественными.

Рассмотрим теперь составляющие собственного вектора $\boldsymbol{a}_k$, определяемого уравнениями (10.15). Так как числа λ_k являются вещественными, то составляющие a_{jk} относятся друг к другу, как вещественные числа. Однако в выборе этих составляющих имеется некоторая неопределённость, так как согласно (10.15) одну из них можно выбрать произвольно. Пользуясь этим, будем требовать, чтобы эта составляющая была числом вещественным, и тогда вещественность величины λ_k обеспечит вещественность и всех остальных составляющих вектора $\boldsymbol{a}_k$. [Любой комплексный коэффициент Ca_i в равенстве (10.9) можно получить тогда за счёт множителя C.] Умножая теперь (10.15) на a_{ik} и суммируя по i, получаем

$$\sum_{i,j} V_{ij} a_{ik} a_{jk} = \lambda_k \sum_{i,j} T_{ij} a_{ik} a_{jk},$$

откуда

$$\lambda_k = \frac{\sum V_{ij} a_{ik} a_{jk}}{\sum T_{ij} a_{ik} a_{jk}}. \tag{10.19}$$

Знаменатель этой дроби равен удвоенной кинетической энергии системы в случае, когда $\dot{\eta}_i = a_{ik}$, и так как составляющие a_{ik} вещественны, то он должен быть числом положительным. Точно так же числитель этой дроби равен удвоенному значению V при $\eta_i = a_{ik}$. Но так как при $\eta_i = 0$ V имеет минимум, то числитель этой дроби не может быть отрицательным. Таким образом, числитель и знаменатель дроби (10.19) являются числами неотрицательными, причём знаменатель отличен от нуля. Следовательно, λ_k есть число неотрицательное.

Вспомним теперь, что через λ мы обозначили величину ω^2. Следовательно, положительные λ соответствуют вещественным частотам колебания. Если бы потенциал системы не имел в положении равновесия минимума, то числитель дроби (10.19) мог бы быть отрицательным, что привело бы к появлению мнимых частот, вызывающих неограниченное возрастание функции $\eta_i(t)$ по экспоненциальному закону. Следовательно, такое движение было бы неустойчивым. Таким образом, мы получили обещанное математическое доказательство того, что устойчивость движения требует минимума потенциала.

Вернёмся теперь к равенству (10.17). Учитывая, что собственные значения λ и собственные векторы $\boldsymbol{a}$ являются вещественными, его можно записать в виде

$$(\lambda_k - \lambda_l) \sum_{i,\, j} T_{ij} a_{il} a_{jk} = 0. \tag{10.17'}$$

Если все корни векового уравнения различны, то будем иметь

$$\sum_{i,\, j} T_{ij} a_{il} a_{jk} = 0 \qquad (l \neq k). \tag{10.20a}$$

Вспомним теперь, что величины a_{jk} не вполне определяются уравнениями (10.15). Для устранения этой неопределённости мы потребуем, чтобы

$$\sum_{i,\, j} T_{ij} a_{ik} a_{jk} = 1, \tag{10.20b}$$

что даст нам n уравнений, однозначно определяющих составляющие каждого из n векторов $\boldsymbol{a}_k$*). Объединив теперь равенства (10.20a) и (10.20b), получим

$$\sum_{i,\, j} T_{ij} a_{il} a_{jk} = \delta_{lk}. \tag{10.21}$$

---

*) Уравнения (10.20b) можно записать в таком виде, что достаточность этих уравнений для устранения неопределённости в коэффициентах a_{jk} станет ясной. Предположим, например, что мы хотим определить величину a_{1k}, причём отношения a_{jk}/a_{1k} уже найдены нами из уравнений (10.15). Тогда, записывая (10.20b) в виде

$$\sum_{i,\, j} T_{ij} \frac{a_{ik}}{a_{1k}} \frac{a_{jk}}{a_{1k}} = \frac{1}{a_{1k}^2},$$

мы можем вычислить левую часть этого равенства и получить a_{1k}.

Если среди корней λ имеются одинаковые, то из равенства (10.17′) нельзя получить равенство (10.20a), так как λ_k может оказаться равным λ_l. Этот исключительный случай мы рассмотрим несколько позже, а сейчас будем считать, что коэффициенты a_{jk} удовлетворяют как уравнению (10.10), так и уравнению (10.20a).

Условие (10.21) можно записать в форме матричного равенства

$$\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{T}\mathsf{A} = \mathsf{1}. \tag{10.21′}$$

Мы видим, что оно несколько напоминает условие ортогональности

$$\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{A} = \mathsf{1} \tag{10.22}$$

[см. равенство (4.36)], хотя и отличается от него присутствием матрицы T. Мы сейчас покажем, что равенство (10.21′) тоже выражает условие ортогональности, но только не в декартовой системе координат.

Обычные условия ортогональности требуют, чтобы

1) каждый из векторов $\boldsymbol{a}_k$ был единичным:

$$\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_k = \sum_j a_{jk}^2 = 1;$$

2) два любых вектора $\boldsymbol{a}_l$ и $\boldsymbol{a}_k$ были взаимно перпендикулярны:

$$\boldsymbol{a}_l \cdot \boldsymbol{a}_k = \sum_j a_{jl} a_{jk} = 0 \qquad (l \neq k).$$

Рассмотрим теперь некоторую косоугольную систему координат, и пусть метрический тензор определяемого им пространства будет равен T. Элементы этого тензора будут величинами постоянными, и поэтому длина какого-либо вектора $\boldsymbol{a}_k$ будет в этом пространстве равна

$$\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_k = \sum_{i,j} T_{ij} a_{ik} a_{jk}$$

[см. уравнение (7.42)]. Аналогично, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}_l$ и $\boldsymbol{a}_k$ будет здесь равно

$$\boldsymbol{a}_l \cdot \boldsymbol{a}_k = \sum_{i,j} T_{ij} \boldsymbol{a}_{il} \boldsymbol{a}_{jk}.$$

Сравнивая теперь эти равенства с равенствами (10.20), видим, что каждый вектор $\boldsymbol{a}_k$ является единичным [равенство (10.20b)] и что при $l \neq k$ векторы $\boldsymbol{a}_l$ и $\boldsymbol{a}_k$ взаимно перпендикулярны [равенство (10.20a)]. Следовательно, *условие* (10.21′) *является условием ортогональности матрицы* A *в пространстве конфигураций с метрическим тензором* T. В декартовом пространстве таким метрическим тензором является единичный тензор $\mathsf{1}$, и поэтому условие (10.21′) сводится здесь к обычным условиям ортогональности.

В главе 4 мы рассматривали *подобное преобразование* матрицы C с помощью матрицы B, определяя его равенством

$$\mathsf{C}' = \mathsf{BCB}^{-1}$$

[см. равенство (4.41)]. Теперь мы введём понятие *конгруэнтного преобразования* матрицы, понимая под ним преобразование

$$\mathsf{C}' = \tilde{\mathsf{A}}\mathsf{CA}, \tag{10.23}$$

где C — преобразуемая матрица, а A — преобразующая. (Если матрица A ортогональна, то $\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^{-1}$, и между этими преобразованиями нет разницы, что становится ясным, если обозначить A^{-1} через B.) Поэтому равенство (10.21′) можно рассматривать как выражение того факта, что конгруэнтное преобразование матрицы T с помощью матрицы A превращает её в единичную матрицу.

Если ввести диагональную матрицу λ с элементами $\lambda_{lk} = \lambda_k \delta_{lk}$, то уравнения (10.15) можно будет записать в виде

$$\sum_j V_{ij} a_{jk} = \sum_{j,\,l} T_{ij} a_{jl} \lambda_{lk},$$

что эквивалентно матричному уравнению

$$\mathsf{VA} = \mathsf{TA}\boldsymbol{\lambda}. \tag{10.24}$$

Умножая его слева на $\tilde{\mathsf{A}}$, получаем:

$$\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{VA} = \tilde{\mathsf{A}}\mathsf{TA}\boldsymbol{\lambda},$$

или, учитывая (10.21′):

$$\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{VA} = \boldsymbol{\lambda}. \tag{10.25}$$

Полученное равенство показывает, что конгруэнтное преобразование матрицы V с помощью матрицы A превращает её в диагональную матрицу $\boldsymbol{\lambda}$, элементами которой являются собственные значения λ_k.

Таким образом, матрица A диагонализирует и T и V. Возвращаясь теперь к интерпретации T как метрического тензора пространства конфигураций, мы можем дать следующее истолкование процессу диагонализации: 1) Матрица A есть матрица линейного преобразования, осуществляющего переход от *косоугольной* системы координат к *прямоугольной*. (Это видно из того факта, что матрица преобразованного метрического тензора равна $\mathsf{1}$.) 2) Оси новой системы координат являются *главными осями* V, т. е. матрица V является в них диагональной. Следовательно, процесс получения основных частот малых колебаний сводится к некоторому *преобразованию главных осей*, подобному тому, которое рассматривалось в главе 5.

Остаётся рассмотреть случай кратных корней векового уравнения, что интересно не столько в практическом отношении, сколько в математическом. Легко видеть, что уравнения (10.15) не определят тогда даже отношения составляющих a_{jk}. Пусть, например, собственное значение λ_k является двукратным. Тогда две любые составляющие a_{jk} можно выбрать совершенно произвольно, а остальные определятся уравнениями (10.15). В качестве иллюстрации рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Вековое уравнение её будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} V_{11}-\lambda T_{11} & V_{12}-\lambda T_{12} \\ V_{12}-\lambda T_{12} & V_{22}-\lambda T_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(V_{12}-\lambda T_{12})^2-(V_{11}-\lambda T_{11})(V_{22}-\lambda T_{22})=0.$$

Предположим теперь, что матрицы T и V таковы, что

$$\frac{V_{12}}{T_{12}}=\frac{V_{11}}{T_{11}}=\frac{V_{22}}{T_{22}}=\lambda_0. \tag{10.26}$$

Тогда это уравнение можно будет записать в виде

$$(T_{12}^2-T_{11}T_{22})(\lambda_0-\lambda)^2=0,$$

показывающем, что λ_0 является его двукратным корнем. Уравнения (10.10) будут здесь иметь вид:

$$(V_{11}-\lambda_0 T_{11})\,a_1+(V_{12}-\lambda_0 T_{12})\,a_2=0,$$
$$(V_{12}-\lambda_0 T_{12})\,a_1+(V_{22}-\lambda_0 T_{22})\,a_2=0,$$

и согласно (10.26) все их коэффициенты равны нулю. Следовательно, любые числа a_1 и a_2 будут удовлетворять этим уравнениям. Поэтому даже при нормирующем требовании (10.20b) здесь все же будет бесконечно много собственных векторов. Вообще ясно, что при двукратном корне λ число этих векторов будет равно ∞, при трёхкратном будет равно ∞^2 и т. д.

В случае кратных корней произвольно выбранная пара собственных векторов не будет, конечно, ортогональной. Тем не менее, пару таких векторов всегда можно образовать, и её всегда можно использовать для получения ортогональной матрицы A. Рассмотрим для простоты процедуру, которой нужно здесь следовать в случае двукратного корня λ. Пусть, например, $\boldsymbol{a}'_k$ и $\boldsymbol{a}'_l$ два произвольных собственных вектора, соответствующих двукратному корню λ, причем $\boldsymbol{a}'_k$ удовлетворяет условию (10.20b). Очевидно, любая линейная комбинация этих векторов также будет собственным вектором, соответствующим корню λ. Поэтому мы образуем вектор

$$\boldsymbol{a}_l=c_1\boldsymbol{a}'_k+c_2\boldsymbol{a}'_l \tag{10.27}$$

и постараемся так выбрать коэффициенты c_1 и c_2, чтобы $\boldsymbol{a}_l$ было ортогонально $\boldsymbol{a}'_k$. Переходя для этого от векторов к их составляющим, запишем (10.27) в виде

$$a_{il} = c_1 a'_{ik} + c_2 a'_{il}. \tag{10.27'}$$

Умножая теперь (10.27′) на $T_{ij}a'_{jk}$ и производя суммирование по i и j, получаем:

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_{il} a'_{jk} = c_1 + c_2 \sum_{i,j} T_{ij} a'_{il} a'_{jk}.$$

Но, чтобы удовлетворить условию ортогональности (10.20a), левая часть этого равенства должна быть равна нулю. Поэтому коэффициенты c_1 и c_2 должны удовлетворять условию

$$\frac{c_1}{c_2} = -\sum_{i,j} T_{ij} a'_{il} a'_{jk}.$$

Другое уравнение, связывающее коэффициенты c_1 и c_2, получается из условия, что $\boldsymbol{a}_l$ должно удовлетворять нормирующему условию (10.20b). Таким путём мы получим два уравнения, определяющих коэффициенты c_1 и c_2, а следовательно, и вектор $\boldsymbol{a}_l$. Что касается собственных векторов, соответствующих другим λ, то как $\boldsymbol{a}_l$, так и $\boldsymbol{a}_k \equiv \boldsymbol{a}'_k$ будут, конечно, им ортогональны, так как теперь будет справедлива аргументация, которой мы пользовались в равенстве (10.17′). Следовательно, таким способом можно получить n собственных векторов $\boldsymbol{a}_j$, составляющие которых будут образовывать матрицу A, удовлетворяющую условию (10.21′).

Аналогичную процедуру можно применить и в случае корня более высокой кратности. Пусть, например, λ будет m-кратным корнем векового уравнения. В этом случае нам нужно будет получить m ортогональных и нормированных собственных векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. Для этого достаточно взять m любых собственных векторов $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_m$ и образовать из них соответствующие линейные комбинации. Вектор $\boldsymbol{a}_1$ можно получить тогда, умножая $\boldsymbol{a}'_1$ на соответствующий коэффициент. После этого можно образовать вектор $\boldsymbol{a}_2$, составляя линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}'_1$ и $\boldsymbol{a}'_2$, и т. д. Число постоянных, подлежащих при этом определению, будет равно сумме m первых целых чисел, т. е. $\frac{1}{2}m(m+1)$. Но так как эти постоянные должны удовлетворять m условиям нормирования и $\frac{1}{2}m(m-1)$ условиям ортогональности, то в общей сложности у нас получится ровно столько условий, сколько нужно иметь для определения всех этих постоянных.

Этот процесс ортогонализации собственных векторов, соответствующих кратному корню λ, такой же, как процесс ортогонализации произвольной системы функций. Он также подобен процессу, которым мы пользовались в главе 5 в случае кратных собственных значений тензора инерции. Поэтому неопределённость, вносимую в выбор векторов $\boldsymbol{a}$ двукратным корнем λ, можно объяснить тем, что все векторы некоторой *плоскости* оказываются при этом собственными. В этом случае мы просто выбираем в этой плоскости два любых перпендикулярных направления и принимаем их за новые главные оси. Собственные векторы матрицы A будут тогда ортами этих осей.

Частоты, относящиеся к кратным корням векового уравнения, часто называют вырождающимися. Следует, однако, заметить, что этот термин имеет здесь не тот смысл, какой придавался ему в предыдущей главе, так как там мы считали частоты вырождающимися даже в том случае, когда они различны, лишь бы только они были соизмеримы.

§ 10.3. Собственные частоты и главные координаты. В предыдущем параграфе мы видели, что решения вида (10.9) удовлетворяют уравнениям движения не при одном значении частоты ω, а в общем случае при n различных значениях. Поэтому решение уравнений движения представляет суперпозицию нескольких колебаний с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Эти частоты, являющиеся решениями векового уравнения, называют частотами *свободного колебания* или *собственными частотами* системы.

Общее решение уравнений движения можно теперь записать в виде

$$\eta_i = \sum_k C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t}, \tag{10.28}$$

где C_k — комплексный масштабный коэффициент, соответствующий данной собственной частоте. Здесь, однако, можно сделать возражение, состоящее в следующем. Так как $\lambda_k = \omega_k^2$, то каждому решению векового уравнения соответствуют две собственные частоты: $+\omega_k$ и $-\omega_k$. И хотя собственный вектор $\boldsymbol{a}_k$ будет для них одним и тем же, однако масштабные коэффициенты C_k^+ и C_k^- могут иметь при этом любые различные значения. Поэтому решение рассматриваемых уравнений должно описываться не формулой (10.28), а формулой

$$\eta_i = \sum_k a_{ik} (C_k^+ e^{-i\omega_k t} + C_k^- e^{-i\omega_k t}). \tag{10.29}$$

Ответом на это возражение служит то, что интересующее нас движение описывается не комплексным решением, а лишь его вещественной частью, которая в формулах (10.28) и (10.29) имеет вид

$$\eta_i = \sum_k f_k a_{ik} \cos(\omega_k t + \delta_k), \tag{10.30}$$

где амплитуда f_k и фаза δ_k определяются начальными условиями. Поэтому мы можем пользоваться как формулой (10.28), так и формулой (10.29), однако первая из них является, конечно, более удобной.

Ортогональность матрицы **A** сильно облегчает определение коэффициентов C_k по заданным начальным условиям. При $t=0$ вещественная часть выражения (10.28) будет равна

$$\eta_i(0)=\sum_k (\operatorname{Re} C_k)\, a_{ik}, \tag{10.31}$$

где символ $\operatorname{Re} C_k$ означает вещественную часть C_k. Аналогично будем иметь

$$\dot{\eta}_i(0)=-\sum_k (\operatorname{Im} C_k)\, a_{ik}\omega_k, \tag{10.32}$$

где $\operatorname{Im} C_k$ обозначает мнимую часть C_k. Из этих $2n$ уравнений можно определить вещественные и мнимые части всех n констант C_k. Чтобы решить, например, уравнения (10.31), их можно умножить на $T_{ij}a_{jl}$ и просуммировать по i и j. Тогда согласно (10.21) будем иметь

$$\sum_{i,j} T_{ij}\eta_i(0)\, a_{jl}=\sum_{i,j,k} (\operatorname{Re} C_k)\, T_{ij}a_{ik}a_{jl}=\sum_k (\operatorname{Re} C_k)\, \delta_{kl},$$

или, выполнив суммирование по k:

$$\operatorname{Re} C_l=\sum_{i,j} T_{ij}\eta_i(0)\, a_{jl}. \tag{10.33}$$

Аналогичным путём можно получить формулу и для мнимых частей коэффициентов C_k, которая будет иметь вид

$$\operatorname{Im} C_l=-\frac{1}{\omega_l}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i(0)\, a_{jl}. \tag{10.34}$$

Таким образом, формулы (10.33) и (10.34) позволяют с помощью матриц **T** и **A** вычислять комплексные коэффициенты C_l непосредственно по начальным условиям.

Движение, описываемое уравнением (10.28), может служить примером много-периодического движения, рассмотренного в главе 9. Правда, оно является особенно простым движением этого типа, так как состоит только из основных частот и совершенно не содержит их линейных комбинаций. Однако, несмотря на это, рассматриваемое движение не является строго периодическим, так как при несоизмеримости собственных частот координаты η_i никогда не примут своих начальных значений. Следовательно, координаты η_i не будут в общем случае разделяющимися координатами, изменяющимися по строго периодическому закону. Однако мы сейчас увидим, что такие координаты можно получить с помощью точечного преобразования координат η_i.

Новые координаты ζ_j мы определим с помощью следующих уравнений, связывающих их с первоначальными координатами η_i:

$$\eta_i = \sum_j a_{ij}\zeta_j. \tag{10.35}$$

Если η_i и ζ_i рассматривать как элементы матриц $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\zeta}$, состоящих из одного столбца, то эти уравнения будут иметь вид

$$\boldsymbol{\eta} = \mathsf{A}\boldsymbol{\zeta}. \tag{10.36}$$

Выведем теперь выражения для потенциальной и кинетической энергий системы в новых координатах. Согласно (10.4) потенциальная энергия V равна

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\eta_i V_{ij}\eta_j,$$

что в матричной форме может быть записано в виде произведения

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathsf{V}\boldsymbol{\eta}. \tag{10.37}$$

Точно так же кинетическую энергию (10.6) можно записать в виде следующего матричного произведения:

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}\mathsf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}}. \tag{10.38}$$

Но транспонированная матрица $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ (состоящая из одной строки) связана с $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ соотношением

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \widetilde{\mathsf{A}\boldsymbol{\zeta}} = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\tilde{\mathsf{A}}$$

(см. задачу 2 гл. 4). Поэтому будем иметь:

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{V}\mathsf{A}\boldsymbol{\zeta},$$

или, учитывая (10.25):

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\zeta}, \tag{10.39}$$

т. е.

$$V = \frac{1}{2}\sum_k \omega_k^2\zeta_k^2. \tag{10.40}$$

Что касается кинетической энергии, то она в новых координатах выражается ещё проще. Так как скорости преобразуются так же, как координаты, то T можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\boldsymbol{\zeta}}}\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{T}\mathsf{A}\dot{\boldsymbol{\zeta}}.$$

Но так как матрица A является «ортогональной» [см. (10.21')], то это выражение принимает вид

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\zeta}}\dot{\zeta}, \tag{10.41}$$

или

$$T = \frac{1}{2}\sum_k \dot{\zeta}_k^2. \tag{10.42}$$

Формулы (10.40) и (10.42) показывают, что T и V в новых координатах являются суммами квадратов и не содержат каких-либо смешанных членов. Конечно, этот результат есть всего лишь новое выражение того факта, что матрица A осуществляет преобразование к главным осям. Аналогичное преобразование мы делали ранее и для тензора инерции, желая привести момент инерции к сумме квадратов. (Новые оси были при этом главными осями эллипсоида инерции.) Здесь мы имеем аналогичную картину, так как кинетическая и потенциальная энергии также являются теперь суммами квадратов (как и момент инерции), причём обе они диагонализируются матрицей A. Таким образом, применяемое здесь преобразование осей является частным случаем известного алгебраического процесса *одновременного приведения двух квадратичных форм к сумме квадратов.*

Уравнения движения в новых координатах тоже становятся более простыми. Лагранжиан системы будет теперь равен

$$L = \frac{1}{2}\sum_k \left(\dot{\zeta}_k^2 - \omega_k^2\zeta_k^2\right), \tag{10.43}$$

и поэтому уравнения Лагранжа примут вид

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2\zeta_k = 0. \tag{10.44}$$

Решая эти уравнения, будем иметь

$$\zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t}, \tag{10.45}$$

что можно, конечно, получить и непосредственно из равенств (10.28). Следовательно, каждая из новых координат является строго периодической функцией с частотой, равной *одной* из собственных частот. Поэтому координаты ζ обычно называют *главными координатами* системы. Очевидно, они являются также разделяющимися координатами, а величины $\omega_k t/2\pi$ представляют собой угловые переменные.

Как показывают равенства (10.35), каждой главной координате соответствует колебание системы с определённой частотой. Каждое из таких колебаний называется главным. При любом таком колебании все координаты η_i изменяются с одной частотой и имеют в каждый момент одинаковые фазы *); относительные амплитуды этих координат определяются матричными элементами a_{ik}. Полное движение системы получается при этом в результате суперпозиции главных колебаний с учётом их амплитуд и фаз, определяемых коэффициентами C_k.

Из изложенного видно, что полное колебание системы не содержит частот, кратных основным. Причина этого заключается в том, что мы считали колебания малыми. Именно поэтому мы могли потенциал системы представить в виде квадратичной формы, что характерно для гармонического движения. Кроме того, переходя к нормальным координатам, мы получили вследствие этого лагранжиан (10.43) в виде суммы лагранжианов нескольких гармонических осцилляторов (с частотами ω_k). Таким образом, малые колебания системы можно рассматривать как результат возбуждения различных гармонических осцилляторов, колеблющихся с различными амплитудами и фазами **).

§ 10.4. Свободные колебания трёхатомной молекулы. Чтобы проиллюстрировать изложенные методы, рассмотрим подробно задачу о свободных колебаниях симметричной трёхатомной молекулы (рис. 68). Пусть крайние атомы этой молекулы имеют массы m, а средний — массу M и пусть в состоянии равновесия расстояние между крайними атомами будет равно $2b$. Для простоты мы рассмотрим только колебания атомов вдоль линии, на которой они расположены, причём связь между ними будем представлять себе в виде двух пружин, соединяющих эти атомы. Жёсткость каждой такой пружины будем считать равной k. В качестве координат, определяющих положение этих атомов, возьмём их абсциссы. Тогда потенциальная энергия V будет равна

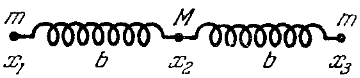

Рис. 68. Модель линейной симметричной трёхатомной молекулы.

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2.$$

Введём теперь координаты

$$\eta_i = x_i - x_{0i},$$

определяющие смещение атомов относительно положений равновесия. Тогда будем иметь:

$$x_{02} - x_{01} = b = x_{03} - x_{02}$$

*) Если коэффициенты a имеют противоположные знаки, то эти фазы могут быть строго противоположными.

**) Подобная картина имеет место в квантовой теории электромагнитного поля. Частотам гармонических осцилляторов здесь соответствуют частоты излучения, а аплитуды возбуждения получают здесь дискретные значения, представляющие число фотонов каждой частоты.

и

$$V = \frac{k}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2}(\eta_3 - \eta_2)^2$$

или

$$V = \frac{k}{2}(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3). \tag{10.46}$$

Следовательно, матрица V будет иметь вид:

$$\mathsf{V} = \begin{Vmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{Vmatrix}. \tag{10.47}$$

Кинетическая энергия этой системы выражается ещё более просто:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2\right) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2. \tag{10.48}$$

Следовательно, матрица T является диагональной и имеет вид:

$$\mathsf{T} = \begin{Vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix}. \tag{10.49}$$

Поэтому вековое уравнение этой системы запишется в виде

$$|\mathsf{V} - \omega^2\mathsf{T}| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix}, \tag{10.50}$$

или

$$\omega^2(k - \omega^2 m)[k(M + 2m) - \omega^2 Mm] = 0. \tag{10.51}$$

Решив это кубическое уравнение, получим:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}. \tag{10.52}$$

Первое из этих значений может показаться странным и даже вызвать сомнение в правильности полученного результата. Дело в том, что оно не согласуется с представлением о колебательном движении, так как при $\omega_1 = 0$ изменение соответствующей главной координаты будет описываться уравнением

$$\ddot{\zeta}_1 = 0,$$

характерным не для колебания, а для равномерного движения. Однако именно в этом и заключается ответ на возникающий вопрос, так как ясно, что молекула может, не изменяя своей потенциальной энергии, перемещаться вдоль оси x как твёрдое тело *). Поэтому «частота» такого движения должна обращаться в нуль, ибо при этом не появляются силы, противодействующие ему. Таким образом, из трёх степеней свободы одна степень соответствует перемещению молекулы как твёрдого тела.

В связи с нулевыми собственными частотами можно сделать следующее общее замечание. Из равенства (10.19) видно, что нулевое значение ω может иметь место только в том случае, когда потенциальная энергия не является *определённо положительной* (т. е. когда она может обращаться в нуль, даже если не все η_i равны нулю). Именно такой случай и имеет место в рассматриваемой системе, так как функция (10.46) обращается в нуль при $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$ (равномерное поступательное движение молекулы). Следовательно, энергия V не является здесь определённо положительной.

Так как частота $\omega_1 = 0$ не относится к числу интересующих нас существенных частот колебания, то желательно поставить задачу так, чтобы с самого начала исключить корень $\omega_1 = 0$. Проще всего сделать это, введя требование (связь), чтобы центр масс молекулы всё время оставался в начале координат. Тогда будем иметь условие

$$m(x_1 + x_2) + Mx_3 = 0, \tag{10.53}$$

позволяющее исключить из функций V и T одну из трёх координат. Таким путём мы получим задачу с двумя степенями свободы (см. задачу 2 в конце этой главы).

Движение молекулы вдоль своей оси является лишь одним из типов движения твёрдого тела. Однако если рассматривать задачу о колебаниях по всем трём направлениям, то у нас появится шесть степеней свободы, соответствующих движению молекулы как твёрдого тела. Тогда она сможет не только равномерно и поступательно двигаться вдоль трёх осей, но и равномерно вращаться вокруг них. В любой подобной системе с n степенями свободы всегда будет шесть частот, обращающихся в нуль, и только $n-6$ частот, отличных от нуля. Уменьшение числа степеней свободы здесь можно получить заранее, налагая на координаты требования о сохранении количества движения и кинетического момента.

Нулевые собственные частоты могут встретиться не только тогда, когда система имеет возможность перемещаться как твёрдое тело. Они имеют место и тогда, когда потенциал V таков, что в положении равновесия обращаются в нуль как первые, так и вторые его производные. Малые колебания возможны при этом тогда, когда четвёртые производные от V не обращаются в положении равновесия в нуль (третьи производные должны быть равны нулю для устойчивости равновесия). Однако колебания системы не будут

---

*) Равновесие, которое не нарушается при отклонении системы от равновесного положения, называют *безразличным*.

в этом случае гармоническими, и поэтому здесь нельзя пользоваться обычным методом малых колебаний. К счастью, колебания такого рода встречаются редко.

Вернёмся теперь к исследованию собственных частот рассматриваемой молекулы. Мы видим, что ω_2 можно рассматривать как частоту колебания массы m, подвешенной к пружине с жёсткостью k. Поэтому мы можем ожидать, что в колебании с этой частотой участвуют только крайние атомы молекулы, а средний атом остаётся при этом неподвижным. Это предположение подтверждается исследованием собственных векторов каждого из главных колебаний.

Составляющие a_{ij} определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} (k-\omega_j^2 m)\,a_{1j} - ka_{2j} &= 0, \\ -ka_{1j} + (2k-\omega_j^2 M)\,a_{2j} - ka_{3j} &= 0, \\ -ka_{2j} + (k-\omega_j^2 m)\,a_{3j} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.54)$$

и нормирующим условием

$$m\,(a_{1j}^2 + a_{3j}^2) + Ma_{2j}^2 = 1. \qquad (10.55)$$

Пусть $j=1$. Тогда $\omega_j=\omega_1=0$, и на основании первого и третьего уравнений (10.54) заключаем, что $a_{11}=a_{21}=a_{31}$. Этот результат следовало, конечно, ожидать, так как рассматриваемое движение является поступательным (рис. 69, *a*). Согласно условию (10.55) величина каждого из этих коэффициентов будет равна:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2m+M}}, \\ a_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2m+M}}, \\ a_{13} &= \frac{1}{\sqrt{2m+M}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.56a)$$

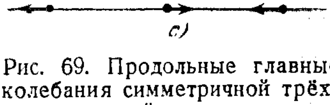

Рис. 69. Продольные главные колебания симметричной трёхатомной молекулы.

Пусть теперь $j=2$. Тогда разность $(k-\omega_j^2 m)=(k-\omega_2^2 m)$ обращается в нуль, и из уравнений (10.54) видно, что $a_{22}=0$ (как мы и предполагали), а $a_{12}=-a_{32}$. Учтя затем нормирующее условие (10.55), получим:

$$a_{12}=\frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad a_{22}=0, \quad a_{32}=-\frac{1}{\sqrt{2m}}. \qquad (10.56b)$$

Таким образом, средний атом остаётся при этом колебании в покое, а два крайних колеблются в строго противоположных фазах, как показано на рис. 69, *b*. (Это связано с тем, что они должны сохранять постоянное количество движения.)

Рассмотрим теперь третье главное колебание, т. е. положим $\omega_j=\omega_3$. Так как вычисления оказываются здесь не столь простыми, как в предыдущих случаях, то мы приведём лишь конечные результаты этих вычислений. Коэффициенты a_{ij} имеют здесь следующие значения:

$$a_{13}=\frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}},\quad a_{23}=\frac{-2}{\sqrt{2M\left(2+\frac{M}{m}\right)}},\quad a_{33}=\frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}}. \tag{10.56c}$$

Крайние атомы имеют здесь одинаковые амплитуды и фазы колебания, а средний — другую амплитуду и строго противоположную фазу (см. рис. 69, *c*).

Любое продольное колебание молекулы (не содержащее поступательного движения) будет линейной комбинацией главных колебаний с частотами ω_2 и ω_3. Амплитуды и фазы этих колебаний определяются, конечно, начальными условиями.

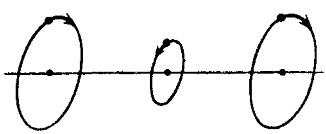

Рис. 70. Поперечные колебания симметричной трёхатомной молекулы.

До сих пор мы говорили только о продольных колебаниях молекулы, хотя реальная молекула будет колебаться и в направлениях, перпендикулярных к её оси. Получить полную систему главных колебаний в этом случае, конечно, труднее, так как молекула будет иметь девять степеней свободы. Принципиально здесь, конечно, нет никаких трудностей, но алгебраическая сторона этого исследования оказывается очень сложной, и поэтому мы не имеем возможности подробно проводить его. Однако эти результаты можно получить на основе общих качественных соображений.

В случае самого общего движения рассматриваемой молекулы число её нулевых частот будет равно пяти, так как здесь будут три степени свободы для поступательного движения и только *две* для вращательного. (Вращение молекулы вокруг её оси, очевидно, не имеет смысла и поэтому не даёт нового типа движения.) Следовательно, эта молекула будет иметь четыре нетривиальных главных колебания. Но так как два из них являются продольными и были уже нами рассмотрены, то остаётся рассмотреть лишь два поперечных колебания. Дальнейшие упрощения можно получить, исходя из соображений симметрии. Из осевой симметрии молекулы следует, что частоты двух её поперечных колебаний должны быть одинаковыми, так как оси y и z являются совершенно равноправными. Поэтому поперечное колебание каждого крайнего атома будет вырождающимся, причём осями y и z здесь могут служить две любые взаимно перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси молекулы. Суммарное поперечное движение атомов определяется амплитудами колебаний вдоль осей y и z и их фазами.

Если имеют место эти колебания и если они совпадают по фазе, то каждый атом будет двигаться по прямой, проходящей через положение его равновесия. Но если фазы этих колебаний не совпадают, то суммарное движение будет происходить по эллипсу Лиссажу (так же, как в двумерном изотропном осцилляторе).

Из симметрии молекулы с очевидностью следует, что амплитуды крайних атомов должны быть одинаковыми. Кроме того, подробный расчёт показывает, что крайние атомы должны двигаться вдоль фигуры Лиссажу в одинаковом направлении. Отсюда следует, что центральный атом должен при этом двигаться в противоположном направлении, так как кинетический момент молекулы должен оставаться постоянным. Рис. 70 иллюстрирует это движение для случая, когда разность фаз основных колебаний равна 90°.

§ 10.5. Вынужденные колебания и диссипативные силы. Свободные колебания возникают в том случае, когда систему выводят из положения равновесия и затем предоставляют самой себе. Однако часто наблюдаются такие колебания, при которых внешние силы действуют на систему не только в момент $t=0$, но и в дальнейшем. Частота такого *вынужденного колебания* определяется тогда не собственными частотами системы, а частотой возмущающей силы. Что же касается вычисления амплитуд таких колебаний, то эта задача сильно упрощается, если пользоваться главными координатами, полученными при исследовании свободных колебаний.

Обозначим через F_j обобщённую силу, соответствующую координате η_j. Тогда согласно (1.46) обобщённая сила Q_i, соответствующая главной координате ζ_i, будет равна

$$Q_i = \sum_j a_{ij} F_j. \tag{10.57}$$

В главных координатах уравнения движения системы будут иметь вид

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_i, \tag{10.58}$$

т. е. будут представлять систему, состоящую из n неоднородных дифференциальных уравнений. Зная функции $Q_i(t)$, мы можем решить её, и хотя это решение будет сложнее, чем в случае свободных колебаний, однако преимущество главных координат сохраняется и здесь, так как каждое из уравнений (10.58) содержит лишь одну координату.

Изменение возмущающей силы со временем часто совершается по синусоидальному закону. Примером может служить возмущающая сила в виде давления звуковой волны, действующей на систему, так как Q_i будет иметь тогда ту же частоту, что и звуковая волна. Другой пример даёт нам многоатомная молекула, на которую падает пучок монохроматического света. В этом случае на каждый атом молекулы будет действовать возмущающая электрическая сила, изменяющаяся по синусоидальному закону с частотой падающего света. Во всех таких случаях сила Q_i может быть записана в виде

$$Q_i = Q_{0i}\cos(\omega t + \delta_i), \tag{10.59}$$

а уравнения (10.58) в виде

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2\zeta_i = Q_{0i}\cos(\omega t + \delta_i), \tag{10.60}$$

где ω — круговая частота возмущающей силы. Общее решение каждого уравнения (10.60) состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения (свободное колебание) плюс частное решение данного неоднородного уравнения. Однако при соответствующих начальных условиях первое из них обращается в нуль *). Поэтому мы сосредоточим своё внимание на частных решениях уравнений (10.60), которые будут иметь вид

$$\zeta_i = B_i\cos(\omega t + \delta_i). \tag{10.61}$$

Амплитуды B_i определяются здесь посредством подстановки частных решений (10.61) в уравнения (10.60):

$$B_i = \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \omega^2}, \tag{10.62}$$

откуда

$$\eta_i = \sum_i a_{ji}\zeta_i = \sum_i \frac{a_{ji}Q_{0i}\cos(\omega t + \delta_i)}{\omega_i^2 - \omega^2}. \tag{10.63}$$

Таким образом, полное колебание будет здесь тоже линейной комбинацией главных колебаний, но каждое главное колебание будет иметь теперь одну и ту же частоту, равную частоте возмущающей силы.

Амплитуда каждого колебания определяется двумя факторами. Первый из них — это амплитуда возмущающей силы, т. е. Q_{0i}. Если сила, действующая на точку, не имеет составляющей в направлении некоторого главного колебания, то, очевидно, соответствующая обобщённая сила будет равна нулю и Q_{0i} обратится в нуль. Другими словами, *внешняя сила может возбудить главное колебание только в том случае, если она стремится двигать точку в направлении этого колебания.*

Вторым фактором является близость частот возмущающей силы и свободного колебания. Как видно из формулы (10.62), амплитуда

---

*) Свободные колебания являются, в сущности, временными. Если к системе, находящейся в равновесии, приложить возмущающие силы, медленно изменяющиеся от нуля, то свободные колебания вообще не возникнут. Другим аргументом в пользу игнорирования свободных колебаний является наличие диссипативных сил (см. следующий параграф), которые уменьшают амплитуду свободных колебаний до нуля.

B_i будет по сравнению с другими амплитудами тем больше, чем ближе ω к ω_i. Формально мы получаем при $\omega = \omega_i$ даже бесконечно большую амплитуду, что представляет хорошо известное явление резонанса. В действительности, конечно, формула (10.62) справедлива только при малых отклонениях от равновесия. В дальнейшем увидим, что в реальных колебаниях амплитуда остаётся конечной и при резонансе. Заметим, что фаза вынужденного колебания совпадает с фазой возмущающей силы только при $\omega < \omega_i$, а при $\omega > \omega_i$ эти фазы отличаются на π.

Все наши рассуждения были до сих пор не вполне реальными, так как мы не учитывали диссипативных сил (сил трения). В большинстве физических систем эти силы пропорциональны скоростям движущихся точек и поэтому могут быть получены с помощью диссипативной функции $\mathfrak{F}$ (см. § 1.5). Рассмотрим сейчас влияние этих сил на свободные колебания.

По определению $\mathfrak{F}$ представляет собой однородную квадратичную функцию скоростей. Поэтому

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathfrak{F}_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \tag{10.64}$$

где коэффициенты $\mathfrak{F}_{ij} = \mathfrak{F}_{ji}$ являются некоторыми функциями координат. Однако, так как мы рассматриваем только малые отклонения от положения равновесия, то, раскладывая $\mathfrak{F}_{ij}$ в степенные ряды в окрестности этого положения, мы можем ограничиться лишь первыми членами этих рядов, т. е. считать коэффициенты $\mathfrak{F}_{ij}$ постоянными (подобно тому, как мы это делали для кинетической энергии). Заметим, что функция $2\mathfrak{F}$ выражает скорость рассеивания энергии вследствие трения и поэтому она не может быть отрицательной.

Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j \mathfrak{F}_{ij} \dot{\eta}_j + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0 \tag{10.65}$$

(см. § 1.5).

Иногда преобразование, диагонализирующее T и V, диагонализирует и $\mathfrak{F}$. Это, в частности, имеет место в том случае, когда диссипативная сила пропорциональна не только скоростям частиц, но и их массам. В этих исключительных случаях уравнения движения в главных координатах будут иметь вид

$$\ddot{\zeta}_i + \mathfrak{F}_i \dot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = 0, \tag{10.66}$$

где $\mathfrak{F}_i$ — положительные коэффициенты диагонализированной формы $\mathfrak{F}$. Уравнения (10.66) образуют систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и их решения можно записать в виде

$$\zeta_i = C_i e^{-i\omega_i' t},$$

причём ω_i' должны удовлетворять уравнениям

$$\omega_i'^2 + i\omega_i'\mathfrak{F}_i - \omega_i^2 = 0. \tag{10.67}$$

Каждое из этих уравнений имеет корни

$$\omega_i' = \pm\sqrt{\omega_i^2 - \frac{\mathfrak{F}_i^2}{4}} - i\frac{\mathfrak{F}_i}{2}, \tag{10.68}$$

откуда видно, что функции ζ_i не являются строго периодическими, так как числа ω_i' содержат мнимые части. Вследствие этого функции $\zeta_i(t)$ будут содержать непериодические множители $e^{-\mathfrak{F}_i t/2}$, и так как $\mathfrak{F}_i > 0$, то при $t \to \infty$ они будут стремиться к нулю. Этот результат следовало, конечно, ожидать, так как, совершая колебания, рассматриваемая система производит работу против сил трения, что приводит к непрерывному уменьшению её энергии (а следовательно, и амплитуды колебаний). Частота изменения функции $\zeta_i(t)$ определяется вещественной частью равенства (10.68), и, как видно из этого равенства, трение уменьшает частоту ω_i до величины $\sqrt{\omega_i^2 - \frac{\mathfrak{F}_i^2}{4}}$. Однако если рассеивание мало, то квадратным членом $\mathfrak{F}_i^2$ можно пренебречь, и частоту колебания можно считать равной собственной частоте при отсутствии трения. Тогда колебание, описываемое функцией $\zeta_i(t)$, можно будет рассматривать как экспоненциально демпфированное свободное колебание. В этом случае будем иметь

$$\zeta_i = C_i e^{-\mathfrak{F}_i t/2} e^{-i\omega_i t}. \tag{10.69}$$

Если функцию рассеивания нельзя диагонализировать одновременно с T и V, то процедура решения уравнений (10.65) становится более сложной. Однако общий характер решения остаётся при этом в основном тем же. Будем искать решение уравнений (10.65) в виде

$$\eta_j = Ca_j e^{-i\omega t} = Ca_j e^{-\varkappa t} e^{-2\pi i\nu t}. \tag{10.70}$$

Подставив эти выражения в (10.65), получим

$$\sum_j V_{ij}a_j - i\omega\sum_j \mathfrak{F}_{ij}a_j - \omega^2\sum_j T_{ij}a_j = 0, \tag{10.71}$$

или, полагая $\omega = i\gamma$:

$$\sum_j V_{ij}a_j + \gamma\sum_j \mathfrak{F}_{ij}a_j + \gamma^2\sum_j T_{ij}a_j = 0. \tag{10.71'}$$

Уравнения (10.71) или (10.71′) являются линейными однородными уравнениями относительно a_j и имеют нетривиальные решения лишь при определённых комплексных значениях ω (или γ). При этом можно показать, что мнимая часть ω (или вещественная часть γ) должна быть отрицательной. Чтобы доказать это, умножим (10.71′) на a_i^* и просуммируем по i. Проделав это, получим:

$$\sum_{i,j} V_{ij}a_i^*a_j + \gamma \sum_{i,j} \mathfrak{F}_{ij}a_i^*a_j + \gamma^2 \sum_j T_{ij}a_i^*a_j = 0, \qquad (10.72)$$

причём из симметричности коэффициентов V_{ij}, $\mathfrak{F}_{ij}$ и T_{ij} следует, что каждая из этих сумм является вещественной (см. § 10.2). Полагая теперь $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ и подставляя это выражение в (10.72), получаем:

$$\sum_{i,j} V_{ij}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) + \gamma \sum_{i,j} \mathfrak{F}_{ij}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) + \gamma^2 \sum_{i,j} T_{ij}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) = 0, \qquad (10.72')$$

что представляет собой квадратное уравнение относительно γ. Корнями его будут комплексно сопряжённые числа γ и γ^* и поэтому сумма их будет равна удвоенной вещественной части числа γ. Но так как сумма корней квадратного уравнения известным образом выражается через его коэффициенты, то можно написать:

$$\gamma + \gamma^* = -2\varkappa = -\frac{\sum \mathfrak{F}_{ij}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j)}{\sum T_{ij}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j)}. \qquad (10.73)$$

Но диссипативная функция $\mathfrak{F}$ не может быть отрицательной, а функция T является определённо положительной. Следовательно, $\varkappa$ есть число положительное или равно нулю.

Таким образом, колебания системы могут только уменьшаться со временем по экспоненциальному закону. Заметим, что если функция $\mathfrak{F}$ является определённо положительной, то $\varkappa$ *должно* быть строго положительным, и каждая функция (10.70) будет иметь экспоненциальный демпфирующий коэффициент.

Частота рассматриваемого колебания определяется вещественной частью ω и зависит от степени рассеивания энергии, однако если демпфирование не очень велико, то она мало отличается от соответствующей собственной частоты.

Перейдём теперь к последнему вопросу — к исследованию вынужденных колебаний при наличии диссипативных сил. Уравнения этих колебаний имеют вид

$$\sum_j V_{ij}\eta_j + \sum_j \mathfrak{F}_{ij}\dot{\eta}_j + \sum_j T_{ij}\ddot{\eta}_j = F_{0i}e^{-i\omega t}, \qquad (10.74)$$

где $F_{0i}e^{-i\omega t} = F_i$ — возмущающая сила, причём F_{0j} может быть комплексным. Разыскивая частное решение этих уравнений в виде

$$\eta_j = A_j e^{-i\omega t},$$

получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд A_j:

$$\sum_j A_j (V_{ij} - i\omega\mathfrak{F}_{ij} - \omega^2 T_{ij}) - F_{0i} = 0. \tag{10.75}$$

Решая её, находим

$$A_j = \frac{D_j(\omega)}{D(\omega)}, \tag{10.76}$$

где $D(\omega)$ — детерминант, составленный из коэффициентов при A_j, а $D_j(\omega)$ получается из $D(\omega)$ посредством замены j-го столбца на $F_{01}, \ldots, F_{0n}$. Нас будет интересовать знаменатель этой дроби, так как именно им определяется резонансная характеристика системы. Поскольку он представляет детерминант векового уравнения, его можно представить в виде

$$D(\omega) = G(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)\ldots(\omega - \omega_n),$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — комплексные частоты свободных колебаний, а G — некоторая постоянная. Это выражение можно записать также в виде

$$D(\omega) = G\prod_{i=1}^{n} [2\pi(\nu - \nu_i) + i\varkappa_i]. \tag{10.77}$$

Желая теперь разделить вещественную и мнимую части A_j, мы должны будем умножить числитель и знаменатель (10.76) на $D^*(\omega)$. Тогда новый знаменатель будет равен

$$D^*(\omega)D(\omega) = GG^*\prod_{i=1}^{n} [4\pi^2(\nu - \nu_i)^2 + \varkappa_i^2], \tag{10.78}$$

откуда видно, что резонанс будет иметь место в том случае, когда частота ν будет совпадать с одной из резонансных частот ν_i. Однако вследствие наличия постоянных $\varkappa_i$ знаменатель (10.78) уже не будет обращаться при этом в нуль. Это связано с тем, что возмущающая сила должна теперь совершать работу против сил трения, и поэтому резонансные амплитуды уже не получаются бесконечными.

Колебания, которые мы рассматривали в этой главе, относились к механическим системам. Однако легко видеть, что здесь имеется много сходства с теорией колебания электрических систем. Так, например, уравнения (10.65) можно рассматривать как относящиеся к n электрическим контурам, взаимодействующим друг с другом. Тогда коэффициенты V_{ij} будут играть роль соответствующих электрических ёмкостей, коэффициенты $\mathfrak{F}_{ij}$ — роль сопротивлений, а коэффициенты T_{ij} — роль индуктивностей. Возмущающие силы $F_{0i}e^{-i\omega t}$ заменятся тогда электродвижущими силами с частотой ω, приложенными к одному или нескольким контурам, а уравнения (10.74) будут играть роль уравнений (2.39) главы 2.

Изложенные нами здесь методы представляют лишь часть тех методов, которые применяются при исследовании малых колебаний. Однако дальнейшее исследование этого вопроса скорее относится к теории взаимодействия электрических контуров, чем к механике.

Вместо этого мы обратим наше внимание на теорию колебаний непрерывных систем. Исторически переход от дискретных систем к непрерывным (осуществлённый Рэлеем и другими) был сделан для исследования колебаний струн, мембран и балок. Другим примером непрерывной системы может служить одна или несколько величин, являющихся функциями x, y, z и t — другими словами, переменное поле. Поэтому методы изучения непрерывных механических систем могут быть применены и к изучению полей, например к электромагнитному полю. В современной теоретической физике эти методы приобрели важное значение при квантовом исследовании полей элементарных частиц, обнаруженных в последнее время в большом количестве.

В следующей главе мы кратко изложим основные вопросы классической механики непрерывных систем.

Задачи

1. Определите главные колебания двойного маятника, изображённого на рис. 5, считая длины его нитей равными, а массы различными. Покажите, что если нижняя масса мала по сравнению с верхней, то собственные частоты этой системы почти одинаковы. Рассмотрите случай, когда этот маятник приводится в движение посредством небольшого отклонения верхней массы от вертикали. Покажите, что в дальнейшем амплитуда каждой из его масс будет периодически уменьшаться до нуля, а амплитуда другой будет достигать при этом максимума («биение»).

2. Для сведѐния задачи о линейной трёхатомной молекуле к двум степеням свободы можно ввести координаты $y_1 = x_2 - x_1$, $y_2 = x_3 - x_2$ и исключить x_2 с помощью условия о неподвижности центра масс. Получите частоты главных колебаний в этих координатах и покажите, что они совпадают с полученными в § 10.4. (Расстояния y_1 и y_2 называют *внутренними координатами* молекулы.)

3. Пусть средний атом молекулы, рассмотренной в § 10.4, будет связан с началом координат пружиной жёсткостью k. Найдите частоты продольных колебаний этой системы и покажите, что в этом случае не будет частоты $\omega = 0$.

4. Молекула состоит из трёх одинаковых атомов, расположенных в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника и связанных пружинами равной жёсткости. Получить детерминант векового уравнения, определяющего частоты её плоских колебаний. Преобразуя столбцы этого детерминанта, покажите, что он имеет трёхкратный корень $\omega = 0$, и найдите остальные его корни.

5. Пусть молекула, указанная в задаче 4, совершает одно из следующих движений: a) равномерное поступательное движение в направлении оси x, b) равномерное поступательное движение в направлении оси y, c) равномерное вращение вокруг оси z. Покажите, что в каждом из этих случаев удовлетворяются уравнения её движения.

6. Покажите, что если возмущающие силы Q_i не являются синусоидальными и демпфирование отсутствует, то главные колебания определяются

формулами

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)}{\omega_i^2 - \omega^2} e^{-i\omega t}\, d\omega,$$

где $G_i(\omega)$ связано с Q_i преобразованием Фурье

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega.$$

Покажите также, что если диссипативная функция диагонализируется одновременно с T и V, то вынужденные колебания определяются формулой

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)\,(\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\mathfrak{F}_i)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\mathfrak{F}_i^2} e^{-i\omega t}\, d\omega.$$

(Знаменатель написанной дроби имеет типичную «резонансную форму». Эти формулы могут служить иллюстрацией эффективности *операторного исчисления* при изучении переходных процессов в линейных системах.)

7. Точка движется по круговой орбите под действием силы, направленной к центру этого круга. Исследуйте движение этой точки после небольшого начального возмущения, введя для этого разностные координаты $\rho = r - r_0$ и $\varphi = \theta - \omega t$, где r_0 — радиус круговой орбиты, а ω — угловая скорость установившегося движения. Выразите T и V в этих координатах, пренебрегая членами выше второго порядка малости относительно ρ и φ. Получите таким способом уравнения движения и выведите условия устойчивости первоначального движения. Покажите, что если V пропорционально r^{-n+1}, то оно будет *устойчивым лишь при* $n < 3$. Покажите также, что одна из частот полученного возмущённого движения равна нулю (что соответствует переходу на новую круговую орбиту).

Рекомендуемая литература

H. Margenau and G. M. Murphy, The Mathematics of Physics and Chemistry.

Глава 9 этой книги содержит краткое введение в теорию малых колебаний, а глава 10 — математические основы матричной алгебры. Метод изложения несколько отличается от нашего, но так же широко применяется матричная алгебра.

A. G. Webster, Dynamics.

Глава V этой книги содержит немного устаревший метод изложения теории колебаний, однако она может оказаться полезной при изучении систем с рассеиванием энергии. Кроме того, здесь хорошо изложены вынужденные колебания и вопросы перехода к непрерывным системам. Наиболее ценными являются сведения, изложенные в конце книги, где коротко рассматриваются квадратичные формы и преобразования к главным осям. При изложении вопроса об одновременной диагонализации матриц T и V автор не пользуется матричной алгеброй, но успешно преодолевает трудности, связанные с наличием кратных корней.

E. T. Whittaker, Analytical Dynamics.

Глава VII этой книги посвящена теории колебаний, и здесь даётся чёткое доказательство того, что матрицы T и V могут быть диагонализированы одновременно. Этот вопрос изложен здесь значительно яснее, чем в книге

Вебстера. Наиболее ценными являются последние параграфы этой главы, посвящённые влиянию связей и колебаниям вблизи режима установившегося движения. § 94 главы VIII посвящён колебаниям при наличии диссипативных сил и содержит изложение этого вопроса лишь для систем с двумя степенями свободы.

M. Bôcher, Introduction to Higher Algebra.

Глава XIII этого курса посвящена диагонализации квадратичных форм с помощью метода, подобного изложенному у Вебстера и Уиттекера. Представляют также интерес первые главы этой книги, где излагается вопрос о решении систем линейных уравнений.

S. Timoshenko and D. H. Young, Advanced Dynamics.

Эта книга является инженерным учебником, и общая теория изложена в ней довольно элементарно. Однако колебания систем с двумя и тремя степенями свободы изложены подробно, и многие из рассмотренных примеров полностью решены. Эти сравнительно простые системы дают ясное представление о таких понятиях, как главные колебания, резонанс и т. д., что часто остаётся менее ясным при абстрактном изложении. В книге рассмотрены также некоторые специальные вопросы, такие, как приближённое решение векового уравнения, или теория малых колебаний системы вблизи установившегося режима движения.

Lord Rayleigh, Theory of Sound.

Эта монография является одной из классических книг по физике. В ней содержится много теорем и различных примеров по всем вопросам теории колебаний, бо́льшая часть которой была развита самим Рэлеем (в частности, введение диссипативной функции). Изложение ведётся последовательно и ясно и, кроме того, излагаются некоторые редко рассматриваемые вопросы, такие, например, как влияние связей и некоторые свойства собственных частот. Как и Вебстер, Рэлей опирается на работу Рауса, который в трудах «Adams Prize Essay,» 1877, и «Rigid Dynamics» впервые дал систематическое изложение теории малых колебаний.

E. A. Guillemin, The Mathematics of Circuit Analysis.

Эта книга убедительно доказывает важность теории малых колебаний в современной электротехнике. Значительное внимание уделяется в ней квадратичным формам и преобразованиям к главным осям. Изложение вопросов, связанных с использованием матричной алгебры, проводится на высоком уровне и отличается изяществом.

G. Herzberg, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules.*

В книге имеется много примеров применения классической теории малых колебаний к вопросам строения молекулы. В ней подробно рассмотрены вопросы об использовании констант движения и свойств симметрии при решении задачи о колебании систем с большим числом степеней свободы, что уменьшает трудности, связанные с решением векового уравнения в этом случае. В книге рассматриваются многие модели молекул и даются соответствующие решения, иллюстрируемые кривыми различных главных колебаний.

ГЛАВА 11

МЕТОДЫ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ И ПОЛЕЙ

Все рассмотренные методы механики справедливы лишь для систем с конечным или счётным числом степеней свободы. Однако известны механические задачи, связанные с исследованием непрерывных систем, например задача о колебании упругого тела. Здесь мы имеем дело с непрерывной системой, каждая точка которой принимает участие в колебаниях. Поэтому движение этого тела может быть описано только посредством задания координат *всех* его точек как функций времени. Развитые нами ранее методы нетрудно модифицировать так, чтобы распространить их и на эти задачи. Наиболее прямой метод такого распространения состоит в аппроксимации непрерывной системы дискретной и последующем переходе к пределу в уравнениях движения.

§ 11.1. Переход от дискретной системы к непрерывной. В качестве примера применения такой процедуры рассмотрим задачу о продольных колебаниях бесконечно длинного упругого стержня. Дискретная система, аппроксимирующая этот стержень, состоит из бесконечного числа точек равной массы, отстоящих друг от друга на расстоянии a и связанных между собой невесомыми пружинами с жёсткостью k (рис. 71). Мы будем предполагать, что эти точки могут двигаться только вдоль прямой, на которой они лежат. Эту дискретную систему можно рассматривать как обобщение линейной трёхатомной молекулы, исследованной в предыдущей главе. Поэтому мы можем воспользоваться обычным методом изучения малых колебаний. Обозначая отклонение i-й точки от положения равновесия через η_i, получаем выражение для кинетической энергии

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m\dot{\eta}_i^2, \tag{11.1}$$

где m — масса каждой точки. Аналогично, потенциальная энергия этой системы будет равна сумме потенциальных энергий отдельных пружин. Поэтому

$$V=\frac{1}{2}\sum_i k(\eta_{i+1}-\eta_i)^2 \tag{11.2}$$

(см. § 10.4). Убедиться в том, что формула (11.2) выражает потенциальную энергию этой системы, можно и непосредственно, вычисляя силу, действующую на i-ю точку, и сравнивая её с силой, полученной из выражения (11.2). Сила, действующая на i-ю точку

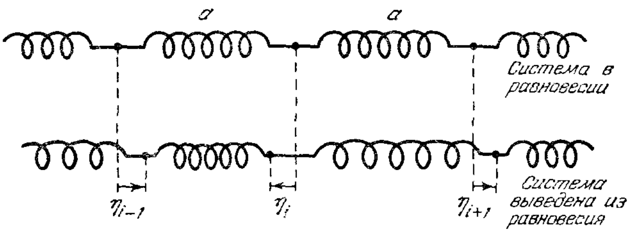

Рис. 71. Дискретная система точек равной массы, связанных пружинами. Эта система имитирует непрерывный упругий стержень.

со стороны правой пружины, равна $k(\eta_{i+1}-\eta_i)$, а сила со стороны левой пружины равна $-k(\eta_i-\eta_{i-1})$. Поэтому F_i равно

$$F_i = k(\eta_{i+1}-\eta_i) - k(\eta_i-\eta_{i-1}),$$

что совпадает с производной $-\dfrac{\partial V}{\partial \eta_i}$, получаемой из формулы (11. 2).

Из выражений (11.1) и (11.2) следует, что лагранжиан данной системы равен

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i \left[m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1}-\eta_i)^2\right], \tag{11.3}$$

что можно записать также в виде

$$L = \frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_i aL_i. \tag{11.4}$$

Следовательно, уравнение Лагранжа для i-й координаты будет иметь вид

$$\frac{m}{a}\ddot{\eta}_i - ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a^2}\right) + ka\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a^2}\right) = 0. \tag{11.5}$$

Та специальная форма, в которой записаны выражения (11.4) и (11.5), выбрана нами для удобства предельного перехода к случаю непрерывного стержня, т. е. к случаю, когда $a=0$. Рассмотрим сначала отношение m/a. Ясно, что при $a\to 0$ оно стремится к линейной плотности μ, т. е. к массе единицы длины стержня. Что касается величины ka, то её предельное значение не столь очевидно. Так как упругий стержень подчиняется закону Гука, то его *относительное удлинение прямо пропорционально растягивающей силе*, и поэтому можно написать:

$$F = Y\xi,$$

где ξ — относительное удлинение, т. е. увеличение единицы длины стержня, а Y — модуль Юнга. Но относительное удлинение отрезка a равно

$$\xi = (\eta_{i+1} - \eta_i)/a,$$

а необходимая для этого сила равна

$$F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right).$$

Следовательно, произведение ka должно соответствовать модулю Юнга непрерывного стержня. Далее ясно, что индекс i, характеризующий номер материальной точки, должен при переходе к непрерывному стержню превратиться в непрерывную координату x. Поэтому вместо переменной η_i будем теперь иметь переменную $\eta(x)$, а фигурирующая в L_i величина

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a}$$

перейдёт, очевидно, в

$$\frac{d\eta}{dx},$$

так как мы стремим a к нулю. Что касается самой величины a, то её нужно заменить теперь на dx, а суммирование по i заменить интегралом по x. Тогда лагранжиан (11.4) примет вид

$$L = \frac{1}{2}\int\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]dx. \tag{11.6}$$

Перейдём теперь к уравнениям движения. Когда a стремится к нулю, два последних члена в уравнении (11.5) принимают вид

$$\lim_{a\to 0} - \frac{Y}{a}\left\{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x-a}\right\},$$

что, очевидно, равно $-Y\dfrac{d^2\eta}{dx^2}$. Следовательно, колебания непрерывного упругого стержня будут описываться уравнением

$$\mu\frac{d^2\eta}{dt^2} - Y\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0. \tag{11.7}$$

Этот простой пример хорошо иллюстрирует метод перехода от дискретной системы к непрерывной. Особенно важно правильно понять здесь роль координаты x, которая *не является* обобщённой координатой, а представляет «непрерывный номер» частицы, аналогичный «дискретному номеру» i. В дискретной системе каждому значению i соответствует определённая обобщённая координата η_i. Здесь же каждому значению x соответствует обобщённая координата $\eta(x)$. Но так как η зависит также и от t, то лучше писать не $\eta(x)$, а $\eta(x, t)$, указывая тем самым, что x и t можно рассматривать как параметры лагранжиана.

Если бы непрерывная система была не одномерной, как в рассмотренном примере, а трёхмерной, то каждая её точка характеризовалась бы тремя непрерывными индексами x, y, z, и следовало бы писать не $\eta(x, t)$, а $\eta(x, y, z, t)$. Лагранжиан её выражался бы тогда не интегралом по x, а трёхкратным интегралом вида

$$L = \int\int\int \mathfrak{L}\,dx\,dy\,dz, \tag{11.8}$$

где $\mathfrak{L}$ — лагранжиан единицы объёма или *удельный лагранжиан*. Для расмотренного выше непрерывного стержня он равен

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left\{\mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right\} \tag{11.9}$$

и получается из величины L_i в уравнении (11.4) при $a \to 0$. В дальнейшем мы увидим, что, составляя уравнения движения системы, нам придётся пользоваться не лагранжианом, а удельным лагранжианом.

§ 11.2. Уравнения Лагранжа для непрерывных систем. Из формулы (11.9) видно, что в случае упругого стержня $\mathfrak{L}$ содержит не только $\dot{\eta} \equiv \frac{\partial\eta}{\partial t}$, но и пространственную производную $\frac{\partial\eta}{\partial x}$. Таким образом, x и t являются здесь равноправными параметрами удельного лагранжиана. В общем случае $\mathfrak{L}$ будет, конечно, функцией не только этих производных, но и самого η, t и x. Если же рассматриваемая непрерывная система является трёхмерной, то её удельный лагранжиан будет иметь вид

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial z}, \frac{\partial\eta}{\partial t}, x, y, z, t\right), \tag{11.10}$$

В механике дискретных систем лагранжиан был важен в том отношении, что позволял получить уравнения движения. Мы увидим сейчас, что в случае непрерывных систем эти уравнения получаются непосредственно из удельного лангранжиана $\mathfrak{L}$. Будем исходить из принципа Гамильтона, который теперь принимает вид

$$\delta I = \delta\int_1^2\int\int\int \mathfrak{L}\,dx\,dy\,dz\,dt = 0 \tag{11.11}$$

Характер фигурирующей здесь вариации почти такой же, как у рассмотренных нами ранее. Параметры x, y, z в процессе этого варьирования не участвуют, и все вариации берутся при постоянных

x, y, z и t. Пределы интегрирования по t, x, y, и z при этом не меняются. Что касается вариаций $\delta\eta$, то они должны обращаться в нуль не только в точках $t=t_1$ и $t=t_2$, но и в любой точке на границе объёма интегрирования.

Переход к задаче на обычный экстремум можно здесь провести так же, как и в случае дискретной системы, т. е. вводя семейство возможных траекторий и характеризуя их значениями некоторого параметра α. Однако так как по δ-вариациям у нас накоплен достаточный опыт, то мы можем и не вводить этого параметра, а пользоваться самим символом δ, помня при этом, что

$$\delta \to d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Так как $\mathfrak{L}$ есть функция не только η и $\dot{\eta}$, но также и производных η по x, y, z, то вариация $\mathfrak{L}$ равна

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}}\delta\dot{\eta} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right), \tag{11.12}$$

где x, y, z заменены для удобства на x_1, x_2, x_3. Поэтому принцип Гамильтона можно записать в виде

$$\int_1^2 \int \int \int \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}}\delta\dot{\eta} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)\right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0. \tag{11.13}$$

Применяя интегрирование по частям (как это делалось при выводе обычных уравнений Лагранжа), получаем:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}}\delta\dot{\eta}\, dt = -\int_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}}\right)\delta\eta\, dt.$$

Аналогичным образом можно поступить и с интегралами, содержащими вариации $\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)$. Переставляя местами символы δ и $\frac{\partial}{\partial x_k}$, будем иметь

$$\int \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right) dx_k = \int \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\frac{\partial \delta\eta}{\partial x_k} dx_k \tag{11.14}$$

и, выполняя интегрирование по частям, получаем *):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)} \delta\eta - \int \frac{d}{dx_k}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\right] \delta\eta\, dx_k. \tag{11.15}$$

Первый член этой разности обращается в нуль (так же, как в интеграле по времени), ибо в крайних точках интервала интегрирования $\delta\eta$ равно нулю. Здесь, впрочем, может возникнуть некоторая трудность, так как размеры рассматриваемой системы могут быть бесконечно большими. Однако при стремлении r к бесконечности η большей частью быстро стремится к нулю, и поэтому первый член разности (11.15) можно считать равным нулю и в этих случаях. Кроме того, мы можем поступить формально и вести интегрирование по конечной области, а после опускания первого слагаемого (11.15) можем считать допустимыми и бесконечные размеры области интегрирования.

Таким образом, принцип Гамильтона принимает вид

$$\int_1^2 \int \int \int \delta\eta \left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}} - \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dx_k}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\right]\right\} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt = 0. \tag{11.16}$$

Обращаться в нуль при произвольном $\delta\eta(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ этот интеграл может только тогда, когда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}} + \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dx_k}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)}\right] - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} = 0. \tag{11.17}$$

Мы знаем, что в случае системы с n степенями свободы имеется n уравнений Лагранжа. Поэтому может показаться странным, что для системы с бесконечным числом степеней свободы получено только одно уравнение (11.17). Следует, однако, помнить, что в обычные уравнения Лагранжа входит только одна независимая переменная — время, а в уравнение (11.17) входят четыре переменные: x_1, x_2, x_3, t. Поэтому уравнение (11.17) является уравнением в частных производных. Можно смотреть на него как на сумму обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся при фиксированных

*) Переход от частной производной по x_k в (11.14) к полной производной в (11.15) может вызвать некоторые недоразумения. В первом случае частная производная указывает на то, что η есть функция не только x_k, но и t, а также других координат. Что касается второго случая, то в выражении (11.15) мы не можем употреблять символ частной производной, так как это означало бы, что рассматривается лишь явная зависимость $\mathfrak{L}$ от x_k. Поэтому мы пользуемся здесь символом полной производной, желая подчеркнуть, что эта производная учитывает и неявную зависимость от x_k, вносимую переменной η. Так или иначе, но смысл операций, которые здесь должны быть выполнены, совершенно ясен.

значениях x_1, x_2, x_3. Тогда число этих уравнений будет бесконечно велико, что согласуется с бесконечно большим числом степеней свободы.

При выводе уравнения (11.17) мы предполагали, что каждая точка системы может совершать лишь один вид перемещения, описываемого величиной η. Однако в более общей задаче, такой, например, как задача о колебаниях упругого тела, будут иметь место перемещения по всем трём направлениям. В этом случае будет иметься не одна обобщённая координата, а три, которые мы будем обозначать индексом j: $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$, где $j = 1, 2, 3$. В более общем случае может быть и не три обобщённые координаты, а больше, и тогда $\mathfrak{L}$ будет функцией всех обобщённых координат и их производных по x_1, x_2, x_3, t. Каждой обобщённой координате $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$ будет соответствовать *одно* уравнение движения, имеющее вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\eta}_j} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\right)}\right] - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta_j} = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{11.18}$$

Обозначения, которыми мы пользуемся, станут намного проще, если ввести так называемую *функциональную производную* *) или *вариационную производную* лагранжиана L по η_j, равную

$$\frac{\delta L}{\delta\eta_j} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta_j} - \sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\right)}. \tag{11.19}$$

Аналогичным образом определяется и функциональная производная L по $\dot{\eta}_j$, но так как $\mathfrak{L}$ не зависит от градиента производной $\dot{\eta}_j$, то

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}_j} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\eta}_j}. \tag{11.20}$$

Преимущество функциональной производной состоит в том, что при пользовании ею мы не имеем дела с зависимостью $\mathfrak{L}$ от производных $\frac{\partial\eta}{\partial x_k}$. Так, например, согласно (11.8), (11.12) и (11.15)

$$\delta L = \int \sum_j \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\eta_j}\delta\eta_j - \sum_k \frac{d}{dx_k}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\right)}\delta\eta_j + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\eta}_j}\delta\dot{\eta}_j\right) dV, \tag{11.21}$$

---

*) Функциональная производная L по η характеризует изменение L при изменении *функции* $\eta(x)$ в окрестности данной точки пространства при условии, что зависимость η от t остаётся неизменной.

где dV — элемент объёма. Если же пользоваться функциональной производной, то этот результат принимает вид

$$\delta L = \int \sum_j \left(\frac{\delta L}{\delta \eta_j} \delta \eta_j + \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j \right) dV, \tag{11.22}$$

что, конечно, проще, чем (11.21), так как здесь не фигурируют производные $\frac{\partial \eta}{\partial x_k}$. Что же касается уравнений (11.18), то через функциональные производные их можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} - \frac{\delta L}{\delta \eta_j} = 0, \tag{11.23}$$

напоминающем обычные уравнения Лагранжа.

Следует заметить, что хотя функциональная производная и упрощает некоторые вариационные процедуры, однако она затемняет тот факт, что уравнения движения являются *уравнениями в частных производных* по x_k и по t. Кроме того, время выступает здесь как особая переменная, существенно отличная от пространственных переменных, в то время как при выводе уравнений движения мы считали x_k и t равноправными параметрами $\mathfrak{L}$. Это равноправие переменных x_k и t немного напоминает специальную теорию относительности. Произведение $dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt$ является здесь, в сущности, элементом объёма в пространстве Минковского и, следовательно, инвариантно относительно преобразований Лоренца; если $\mathfrak{L}$ есть некоторый инвариантный скаляр этого пространства, то принцип Гамильтона (11.11) также будет инвариантен относительно преобразований Лоренца. В ковариантных обозначениях уравнение (11.17) будет иметь вид

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} = 0, \tag{11.24}$$

и если $\mathfrak{L}$ и η будут скалярами пространства Минковского, то оно будет релятивистски инвариантным. То же самое относится и к уравнениям (11.18), инвариантность которых будет обеспечена, если $\mathfrak{L}$ будет скаляром пространства Минковского, а η_i будут обладать некоторыми характерными особенностями, например, будут составляющими 4-вектора.

В качестве простого примера применения полученных уравнений рассмотрим снова продольные колебания длинного упругого стержня. В этом случае $\mathfrak{L}$ будет определяться формулой (11.9), и поэтому будем иметь:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}} = \mu \dot{\eta}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} = -Y \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Следовательно, уравнение (11.17) в этом случае имеет вид

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0,$$

что совпадает с уравнением (11.7), полученным ранее. Это уравнение описывает распространение волны в одномерном пространстве и для скорости этой волны даёт выражение

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}, \tag{11.25}$$

совпадающее с известным выражением для скорости продольных упругих волн.

§ 11.3. Звуковые колебания в газах. Для того чтобы проиллюстрировать изложенные методы, рассмотрим задачу о продольных колебаниях газа. Эти колебания образуют так называемое *звуковое поле*, и уравнение, которое мы получим, будет волновым уравнением распространения звуковой волны. Перемещение частиц газа будем характеризовать вектором $\boldsymbol{\eta}$ с составляющими η_i ($i = 1, 2, 3$). Следовательно, каждая точка x, y, z будет характеризоваться тремя относящимися к ней обобщёнными координатами. Колебания газа мы будем считать малыми и поэтому давление P и плотность μ будем считать мало отличающимися от их равновесных значений P_0 и μ_0.

Если бы рассматриваемая система была дискретной, то нам нужно было бы найти её кинетическую энергию T и потенциальную энергию V, а затем образовать разность $T - V = L$. Но в данном случае L равно $\iiint \mathfrak{L}\, dx\, dy\, dz$, и поэтому T равно интегралу $\iiint \mathfrak{T}\, dx\, dy\, dz$, а V — интегралу $\iiint \mathfrak{V}\, dx\, dy\, dz$, где $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{V}$ — кинетическая и потенциальная энергии единицы объёма. Поэтому наша задача сводится к вычислению разности

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{T} - \mathfrak{V}. \tag{11.26}$$

Что касается удельной кинетической энергии $\mathfrak{T}$, то она находится без труда. Учитывая, что мы рассматриваем только малые отклонения от положения равновесия, будем иметь:

$$\mathfrak{T} = \frac{\mu_0}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 = \frac{\mu_0}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2). \tag{11.27}$$

Удельную потенциальную энергию $\mathfrak{V}$ найти несколько труднее. Потенциальная энергия газа является мерой той работы, которую он может произвести при расширении. Рассмотрим теперь массу газа M с равновесным объёмом

$$V_0 = \frac{M}{\mu_0},$$

который мы будем считать достаточно малым. Тогда $\mathfrak{B}$ можно будет считать постоянным, и потенциальная энергия этой массы газа будет равна $\mathfrak{B}V_0$. Пусть затем этот объём изменяется от V_0 до V_0+dV. Тогда над этим газом будет совершена работа $-P\,dV$ *). Следовательно, потенциальная энергия газа, соответствующая объёму $V_0+\Delta V$, равна

$$\mathfrak{B}V_0 = -\int\limits_{V_0}^{V_0+\Delta V} P\,dV. \qquad (11.27\text{a})$$

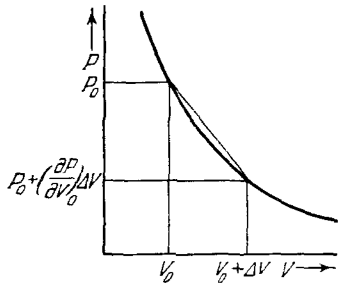

Рис. 72. Кривая зависимости давления газа от его объёма.

Заметим, что, несмотря на малость ΔV, этот интеграл нельзя считать равным $-P_0\,\Delta V$, ибо, как мы в дальнейшем увидим, этот член не оказывает влияния на уравнения движения. Поэтому давление $P(V)$ будем считать не постоянным, а изменяющимся по линейному закону на участке от V_0 до $V_0+\Delta V$ (рис. 72). Тогда будем иметь

$$\int\limits_{V_0}^{V_0+\Delta V} P\,dV = P_0\,\Delta V + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_0 (\Delta V)^2. \qquad (11.28)$$

Для того чтобы вычислить производную $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_0$, обратимся к термодинамике. Согласно закону Бойля связь между давлением газа и его объёмом выражается равенством

$$PV = C \qquad (11.29)$$

(этим соотношением пользовался Ньютон). Однако в данном случае этим соотношением пользоваться нельзя, так как оно предполагает *изотермическое* изменение состояния газа, в то время как звуковые колебания всегда совершаются так быстро, что температура газа не успевает выравняться. Поэтому сжатие и расширение газа происходят здесь *адиабатически*, т. е. по закону

$$PV^\gamma = C, \qquad (11.30)$$

где γ — константа, равная отношению удельной теплоёмкости при постоянном давлении к удельной теплоёмкости при постоянном

---

*) Выделим на поверхности газа элемент dA. Действующая на него внешняя сила равна $P\,dA$ и направлена внутрь объёма V_0. Но так как при расширении газа этот элемент движется в направлении наружной нормали и перемещается на величину dx, то внешние силы совершают при этом работу $-P\,dA\,dx = -P\,dV$.

объёме *). Следовательно, искомая производная равна

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_0 = -\frac{\gamma P_0}{V_0}. \qquad (11.31)$$

Изменение объёма газа целесообразно выразить через соответствующее изменение его плотности. Так как $V = M/\mu$, то

$$\Delta V = -\frac{M}{\mu\mu_0}\Delta\mu \approx -V_0\sigma, \qquad (11.32)$$

где σ — относительное изменение плотности, определяемое формулой

$$\mu = \mu_0(1+\sigma). \qquad (11.33)$$

Объединяя теперь равенства (11.27а), (11.28), (11.31) и (11.32), получаем следующее выражение для $\mathfrak{V}$:

$$\mathfrak{V} = P_0\sigma + \frac{\gamma P_0}{2}\sigma^2. \qquad (11.34)$$

Теперь нам нужно выразить σ через $\boldsymbol{\eta}$. Рассмотрим для этого некоторый фиксированный объём пространства. Масса газа, выходящего из этого объёма при небольшом нарушении равновесия, равна

$$\mu_0\int \boldsymbol{\eta}\cdot d\boldsymbol{A},$$

где $d\boldsymbol{A}$ — элемент поверхности, ограничивающей этот объём. Но так как эта масса должна равняться объёмному интегралу $\int(\mu-\mu_0)\,dV$, то должно выполняться равенство

$$-\mu_0\int\sigma\,dV = \mu_0\int\boldsymbol{\eta}\cdot d\boldsymbol{A}, \qquad (11.35)$$

которое можно записать также в виде

$$-\int\sigma\,dV = \int\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}\,dV.$$

Так как последнее равенство должно быть справедливо для любого объёма, то мы приходим к соотношению **)

$$\sigma = -\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}. \qquad (11.36)$$

Таким образом, мы окончательно получаем:

$$\mathfrak{V} = -P_0\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} + \frac{\gamma P_0}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})^2. \qquad (11.37)$$

---

*) Вывод этой формулы см., например, в книге: M. W. Zemansky, Heat and Thermodynamics, McGraw — Hill, гл. VI.

**) Равенство (11.36) можно записать в виде

$$\dot{\mu} = -\nabla\cdot\mu\dot{\boldsymbol{\eta}},$$

что представляет обычное уравнение неразрывности газового потока.

Из равенства (11.35) видно, что первое слагаемое выражения (11.34) не влияет на величину полной потенциальной энергии. Для доказательства возьмём поверхность, охватывающую весь рассматриваемый газ. Тогда правая часть равенства (11.35) обратится в нуль, так как газ не выходит за пределы этой поверхности. Но отсюда следует, что интеграл $\int \sigma\, dV$, взятый по всему объёму газа, также будет равен нулю и, следовательно, не войдёт в L. Следует, однако, заметить, что это обстоятельство не является ещё достаточным для того, чтобы опустить первое слагаемое формулы (11.37), так как если судить априори, то это слагаемое, возможно, оказывает влияние на уравнения движения. (Напомним, что равенство нулю ковариантного гамильтониана не означает, что он не оказывает влияния на уравнения движения.) Поэтому мы не будем пока отбрасывать этого слагаемого.

Удельный лагранжиан $\mathfrak{L}$ можно записать теперь в виде

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left[\mu_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + 2P_0 \nabla\cdot\boldsymbol{\eta} - \gamma P_0 (\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})^2\right], \tag{11.38}$$

откуда видно, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}_i} = \mu_0 \dot{\eta}_i, \\ &\frac{\partial (\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})}{\partial\left(\dfrac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\right)} = \delta_{ik}, \\ &\frac{\partial (\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})^2}{\partial\left(\dfrac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\right)} = 2(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})\cdot\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{11.39}$$

Из равенств (11.39) следует, что член $2P_0\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}$ не влияет на уравнения движения. Поэтому мы его теперь опустим и будем писать $\mathfrak{L}$ в виде

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left[\mu_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 - \gamma P_0 (\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})^2\right]. \tag{11.40}$$

Получающиеся отсюда уравнения движения имеют вид

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} - \gamma P_0 \frac{\partial (\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{11.41}$$

что эквивалентно векторному уравнению

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\eta}}{\partial t^2} - \gamma P_0 \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} = 0. \tag{11.42}$$

Физический смысл полученного уравнения становится более ясным после умножения обеих частей его на оператор ∇. Учитывая, что

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} = -\sigma \quad \text{и} \quad \nabla\cdot\nabla = \nabla^2,$$

получаем:

$$\nabla^2\sigma - \frac{\mu_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = 0. \tag{11.43}$$

Легко видеть, что это есть обычное уравнение трёхмерной волны, распространяющейся со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}. \tag{11.44}$$

Таким образом, мы получили известное выражение для скорости звука в газе.

Этим заканчивается решение задачи о составлении уравнений Лагранжа для звуковых колебаний в газе.

§ 11.4. Уравнения Гамильтона для непрерывных систем. Уравнения Гамильтона для непрерывных систем можно получить методом, подобным тому, который применялся в главе 7 для дискретных систем. Для простоты начнём с системы, рассмотренной в § 11.1 и состоящей из материальных точек, отстоящих друг от друга на расстоянии a. Каждой обобщённой координате η_i будет соответствовать канонический импульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}, \tag{11.45}$$

и поэтому гамильтониан этой системы будет равен

$$H \equiv \sum_i p_i\dot{\eta}_i - L = \sum_i a\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - L,$$

или

$$H = \sum_i a\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - L_i\right). \tag{11.46}$$

В пределе же, когда $a \to 0$ и $L_i \to \mathfrak{L}$, эта сумма переходит в интеграл

$$H = \int dx\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}}\dot{\eta} - \mathfrak{L}\right). \tag{11.47}$$

Из равенства (11.45) видно, что когда a стремится к нулю, каждый импульс p_i тоже стремится к нулю. Поэтому мы введём так называемый *удельный импульс* π, определив его равенством

$$\pi = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\eta}}.$$

Кроме того, введём понятие *удельного гамильтониана*, понимая под ним величину

$$\mathfrak{H} = \pi\dot{\eta} - \mathfrak{L}. \tag{11.48}$$

Тогда интеграл (11.47) будет интегралом $\int \mathfrak{H}\,dx$, и ясно, что в случае трёхмерной системы с несколькими обобщёнными координатами мы будем иметь аналогичную формулу

$$H=\int\int\int \mathfrak{H}\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\int\int\int\Big(\sum_k \pi_k\dot{\eta}_k-\mathfrak{L}\Big)dx_1\,dx_2\,dx_3, \tag{11.49}$$

где

$$\pi_i=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\eta}_i}=\frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}_i}. \tag{11.50}$$

Канонические уравнения движения могут быть получены с помощью той процедуры, которая применялась нами в § 7.1. Мы будем считать, что $\mathfrak{H}$ есть функция обобщённых координат $\eta_k(x_j, t)$, удельных канонических импульсов $\pi_k(x_j, t)$, производных $\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}$ и, возможно, времени t. Тогда будем иметь

$$dH=\int\int\int\left\{\sum_k\left[\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\eta_k}d\eta_k+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\pi_k}d\pi_k+\sum_j\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)}d\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}dt\right\}dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Написанный здесь интеграл немного напоминает тот интеграл, с которым мы встречались в принципе Гамильтона в форме (11.13). Поэтому интеграл

$$\int\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)}d\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)dx_j$$

мы будем, как и там, брать по частям. При этом получим два слагаемых, первое из которых можно считать равным нулю, так как область интегрирования может быть взята настолько большой, что на её границе η и $\mathfrak{H}$ будут обращаться в нуль. В результате dH можно будет записать в виде

$$dH=\int\int\int\left\{\sum_k\left[\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\eta_k}d\eta_k+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\pi_k}d\pi_k-\sum_j\frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)}\right)d\eta_k\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}dt\right\}dx_1\,dx_2\,dx_3 \tag{11.51}$$

или, пользуясь функциональной производной (11.19), в виде

$$dH=\int\int\int\left\{\sum_k\left(\frac{\delta H}{\delta\eta_k}d\eta_k+\frac{\delta H}{\delta\pi_k}d\pi_k\right)+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}dt\right\}dx_1\,dx_2\,dx_3 \tag{11.52}$$

(так как $\mathfrak{H}$ не является функцией пространственных производных от π_k). Следует заметить, что подобное интегрирование по частям и последующее введение функциональных производных (11.19) возможно во всех случаях, когда вычисляется изменение величины, плотность которой зависит от производных $\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}$ или $\frac{\partial \pi_k}{\partial x_j}$.

Вспомним теперь, что согласно (11.49) dH равно

$$dH = \int\int\int \left\{ \sum_k \left(\pi_k \, d\dot{\eta}_k + \dot{\eta}_k \, d\pi_k - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \eta_k} \, d\eta_k - \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} \, d\dot{\eta}_k \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \, dt \right\} dx_1 \, dx_2 \, dx_3. \qquad (11.53)$$

Но крайние члены суммы, стоящей в круглых скобках, очевидно, уничтожаются, что видно из равенства (11.50), определяющего π_k. Кроме того, согласно уравнениям Лагранжа (11.23)

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_k} = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} = \dot{\pi}_k.$$

Следовательно, равенство (11.53) можно записать в виде

$$dH = \int\int\int \left\{ \sum_k \left(-\dot{\pi}_k \, d\eta_k + \dot{\eta}_k \, d\pi_k \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \, dt \right\} dx_1 \, dx_2 \, dx_3. \qquad (11.54)$$

Сравнивая теперь уравнения (11.54) и (11.52), мы получаем систему уравнений

$$\frac{\delta H}{\delta \eta_k} = -\dot{\pi}_k, \qquad \frac{\delta H}{\delta \pi_k} = \dot{\eta}_k \qquad (11.55)$$

и тождество

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}.$$

Уравнения (11.55) являются аналогами обычных уравнений Гамильтона и справедливы для произвольной непрерывной системы. Выражая их через удельный гамильтониан $\mathfrak{H}$, получаем:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \eta_k} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right] = -\dot{\pi}_k, \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_k} = \dot{\eta}_k. \qquad (11.56)$$

В этой форме они в отличие от формы (11.55) являются несимметричными (так как $\mathfrak{H}$ не является функцией градиентов величин π_k).

В качестве простого примера применения этих уравнений рассмотрим опять звуковые колебания газа. Величины π_k будут здесь, очевидно, равны

$$\pi_k = \mu_0 \dot{\eta}_k,$$

что можно записать в виде векторного равенства

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}.$$

Поэтому удельный гамильтониан $\mathfrak{H}$ будет в этом случае равен

$$\mathfrak{H} = \boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} - \mathfrak{L} = \frac{\pi^2}{2\mu_0} + \frac{P_0\gamma}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \tag{11.57}$$

[см. уравнение (11.40)]. Отсюда видно, что $\mathfrak{H}$ равно

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T} + \mathfrak{V},$$

т. е. равно сумме удельной кинетической и удельной потенциальной энергий. Поэтому $\mathfrak{H}$ в данном случае есть просто удельная энергия *). Таким образом, канонические уравнения данной системы будут иметь вид:

$$\dot{\eta}_k = \frac{\pi_k}{\mu_0}, \quad -\dot{\pi}_k = -\frac{d}{dx_k}(P_0\gamma\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}).$$

Совокупность этих двух систем эквивалентна уравнениям (11.41). (Первая из этих систем лишь повторяет равенства, выражающие величины π_k.)

Бóльшую часть формальных результатов, полученных нами ранее в связи с уравнениями Гамильтона (теоремы о сохранении, скобки Пуассона и т. д.), можно легко распространить и на случай непрерывных систем. Например, модифицированный принцип Гамильтона будет теперь иметь вид

$$\delta \int_1^2 \int \int \int \left\{ \sum_k \pi_k \dot{\eta}_k - \mathfrak{H} \right\} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt = 0. \tag{11.58}$$

В качестве другого примера рассмотрим теорему о сохранении, а именно теорему о сохранении самого гамильтониана. Полная производная $\frac{dH}{dt}$ равна

$$\frac{dH}{dt} = \int \int \int \left\{ \sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right\} dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

что согласно уравнениям (11.55) можно записать в виде

$$\frac{dH}{dt} = \int \int \int \left\{ \sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right\} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

или

$$\frac{dH}{dt} = \int \int \int \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

---

*) Мы опустили член, линейный относительно $\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}$, так как было показано, что он не оказывает влияния на полную энергию.

Таким образом, H будет постоянным тогда, когда $\mathfrak{H}$ (или H) не является явной функцией t.

Рассмотрим теперь какую-либо функцию G, не зависящую явно от t и имеющую вид интеграла

$$G = \iiint \mathfrak{G} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

Полная производная её по времени будет равна

$$\frac{dG}{dt} = \int\int\int \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) dx_1 \, dx_2 \, dx_3,$$

что с помощью уравнений движения можно записать в виде

$$\frac{dG}{dt} = \int\int\int \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) dx_1 \, dx_2 \, dx_3. \tag{11.59}$$

Но правая часть этого равенства является очевидным аналогом скобок Пуассона $[G, H]$ [см. равенство (8.42)]; суммирование по обобщённым координатам заменяется здесь интегрированием по «непрерывным номерам» x_1, x_2, x_3 и дискретному индексу k. Поэтому можем написать

$$\frac{dG}{dt} = [G, H], \tag{11.60}$$

а в случае, когда G будет явной функцией t, мы, очевидно, получим

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t},$$

что совпадает с равенством (8.58). Следовательно, если G не является явной функцией t и скобки Пуассона $[G, H]$ обращаются в нуль, то G будет сохраняться постоянным. Заметим, что этот результат справедлив и тогда, когда $\mathfrak{G}$ есть функция пространственных производных η или π, что видно из проведённого доказательства.

Таким образом, теоремы о сохранении можно получить здесь тем же методом, что и в обычной теории. Между интегральными константами движения и свойствами симметрии системы также имеется известная нам связь. Однако следует подчеркнуть, что, кроме этих «микроскопических» констант движения, имеются ещё и «микроскопические» теоремы о сохранении. Эти теоремы относятся не к интегральным величинам, а к дифференциальным, т. е. к плотностям. Например, можно получить теоремы, выражающие свойства неразрывности внутреннего потока энергии, количества движения и кинетического момента. К сожалению, мы не можем останавливаться на этих вопросах и отсылаем интересующихся читателей к литературе, приведённой в конце главы.

§ 11.5. Описание полей с помощью вариационных принципов. Методы, изложенные нами в предыдущих параграфах, были развиты для исследования непрерывных механических систем, например упругих тел. Однако эти методы можно использовать и для получения уравнений *поля*, так как с математической точки зрения поле представляет одну или несколько независимых функций от x_j и t, и их можно рассматривать как обобщённые координаты $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$. Заметим, что некоторые поля, встречающиеся в физике, можно действительно связать с движением некоторой непрерывной среды. Таким является, например, звуковое «поле», связанное с продольными колебаниями частиц материальной среды. Точно так же электромагнитное поле долгое время связывалось с упругими колебаниями неведомого эфира, и лишь в последнее время стало ясно, что эфир играет лишь роль объекта, к которому относятся слова «передавать возмущение» (по выражению С. Л. Квимби).

Если вариационные методы, изложенные в предыдущих параграфах, не связывать с понятием непрерывной механической системы, то они могут служить для получения уравнений пространственно-временно́го поля. Принцип Гамильтона будет тогда служить компактным выражением свойств этого поля.

Так как удельный лагранжиан мы не будем теперь связывать с определённой механической системой, то он не обязательно должен быть равен разности удельных энергий — кинетической и потенциальной. Вместо этого мы можем взять для $\mathfrak{L}$ любое выражение, приводящее к нужным уравнениям поля. Рассмотрим, например, поле, возникающее при звуковых колебаниях газа. В § 11.3 при описании этого поля мы рассматривали перемещения отдельных частиц газа и принимали эти перемещения за обобщённые координаты. Однако это поле является, в сущности, скалярным, так как для его исследования можно пользоваться лишь одной величиной — скаляром σ, представляющим относительное изменение плотности. Поэтому σ является здесь естественной координатой, и именно через неё должна выражаться величина $\mathfrak{L}$. При этом $\mathfrak{L}$ должно быть таким, чтобы полученное из него уравнение совпадало с волновым уравнением (11.43). Легко видеть, что этому условию удовлетворяет следующее выражение для $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mu_0}{\gamma P_0}\dot{\sigma}^2 - (\nabla\sigma)^2\right] = \frac{\mu_0}{2\gamma P_0}\dot{\sigma}^2 - \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}\right)^2. \quad (11.61)$$

Действительно, согласно (11.61) имеем:

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma} = 0, \qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\sigma}} = \frac{\mu_0\dot{\sigma}}{\gamma P_0}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}\right)} = -\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}.$$

Поэтому уравнение (11.17) будет здесь иметь вид

$$\frac{\mu_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}-\sum_k \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_k^2}=0,$$

что совпадает с уравнением (11.43). Заметим, что выражение (11.61) не совпадает с выражением (11.40), полученным нами для $\mathfrak{L}$ в § 11.3. Кроме того, ни один из членов выражения (11.61) не является удельной кинетической или удельной потенциальной энергией. Тем не менее, мы видим, что это $\mathfrak{L}$ приводит к правильному волновому уравнению, т. е. удовлетворяет поставленной цели.

Для описания звукового поля можно также пользоваться удельным гамильтонианом

$$\mathfrak{H}=\frac{1}{2}\left[\frac{\gamma P_0}{\mu_0}\pi^2+(\nabla\sigma)^2\right]. \tag{11.62}$$

Легко видеть, что это выражение приводит к нужному нам уравнению поля, хотя оно и отличается от (11.53) и не выражает плотности энергии механической системы.

В качестве более сложного примера образования лагранжиана рассмотрим электромагнитное поле в вакууме. В этом случае $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}$ (в единицах Гаусса), и уравнения Максвелла (1.55) принимают вид

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \tag{11.63}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho, \quad \nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{4\pi\boldsymbol{j}}{c}. \tag{11.64}$$

Первая пара этих уравнений, т. е. уравнения (11.63), эквивалентна следующим:

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{1.58}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{1.57}$$

которые выражают тот факт, что поле имеет скалярный и векторный потенциалы. В противоположность этому уравнения (11.64) описывают процесс образования и изменения поля под действием зарядов и токов. Поэтому именно их мы будем рассматривать как уравнения поля. Так как шесть составляющих этого поля не являются независимыми, но могут быть выражены через четыре составляющие потенциалов, то в качестве обобщённых координат этого поля выберем потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ.

Покажем теперь, что уравнения (11.64) можно получить с помощью удельного лагранжиана

$$\mathfrak{L}=\frac{E^2-B^2}{8\pi}-\rho\varphi+\frac{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}}{c}, \tag{11.65}$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ — правые части равенств (1.58) и (1.57). Вычисляя для этого производные $\mathfrak{L}$ по φ и по $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, будем иметь:

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi}=-\rho \quad \text{и} \quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}=\frac{E_k}{4\pi}\frac{\partial E_k}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}=-\frac{E_k}{4\pi}.$$

Но так как производные $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ вообще не входят в $\mathfrak{L}$, то уравнение Лагранжа, соответствующее координате φ, будет иметь вид

$$\frac{1}{4\pi}\sum_k\frac{\partial E_k}{\partial x_k}-\rho=0, \quad \text{или} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho,$$

что совпадает с первым из уравнений (11.64). Получим теперь уравнения Лагранжа для составляющих вектора $\boldsymbol{A}$. Рассмотрим для этого одну из таких составляющих, например A_1. Вычисляя связанные с ней производные $\mathfrak{L}$, получим:

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_1}=\frac{j_1}{c}, \quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{A}_1}=\frac{E_1}{4\pi}\frac{\partial E_1}{\partial\dot{A}_1}=-\frac{E_1}{4\pi c},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)}=-\frac{1}{4\pi}B_3\frac{\partial B_3}{\partial\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)}=\frac{B_3}{4\pi}, \quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)}=-\frac{B_2}{4\pi}.$$

Поэтому уравнение Лагранжа, соответствующее координате A_1, будет иметь вид

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2}-\frac{\partial B_2}{\partial x_3}\right)-\frac{1}{4\pi c}\frac{dE_1}{dt}-\frac{j_1}{c}=0. \tag{11.66}$$

Легко видеть, что, проектируя уравнение

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}=\frac{4\pi\boldsymbol{j}}{c}$$

на ось x_1, мы получаем точно такой же результат. Следовательно, для координаты A_1 мы получили нужное нам уравнение и точно также могли бы получить уравнения и для координат A_2 и A_3. Таким образом, удельный лагранжиан (11.65) приводит к уравнениям Максвелла (11.64) *).

---

*) В некоторых отношениях электромагнитное поле представляет собой неудачный пример. Одной из трудностей здесь является отсутствие в $\mathfrak{L}$ производной $\dot{\varphi}$ и, следовательно, отсутствие канонического импульса, соответствующего φ, что затрудняет применение метода Гамильтона, изложенного в § 11.4. В сущности, источник появляющихся здесь трудностей заключается в том, что скалярный и векторный потенциалы являются не вполне независимыми, так как они связаны между собой так называемым *калибровочным условием*. Оно является дополнительным условием, позволяющим исключить одну из обобщённых координат и оставить только независимые координаты. Подробнее смотри об этом в книге: G. Wentzel, Introduction to the Quantum Theory of Fields. (Имеется русский перевод: Венцель, Введение в квантовую теорию волновых полей.)

Плотность тока можно записать в виде

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}, \tag{11.67}$$

где ρ — плотность заряда, а $\boldsymbol{v}$ — его скорость, являющаяся некоторой функцией $\boldsymbol{r}$. Учитывая это соотношение и интегрируя (11.65), мы получаем следующее выражение для полного лагранжиана электромагнитного поля:

$$L = \int \left\{\frac{E^2 - B^2}{8\pi} - \rho\left(\varphi - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}}{c}\right)\right\} dV. \tag{11.68}$$

Следует заметить, что выражение, стоящее в круглых скобках, уже встречалось нам при вычислении лагранжиана заряженной частицы в электромагнитном поле [см. уравнение (1.61)]. Таким образом, эта часть L является обобщённым потенциалом заряженной точки.

Если в поле имеется заряженная частица, то её масса и заряд будут сконцентрированы в одной точке пространства. Следовательно, плотность её заряда должна равняться нулю всюду, кроме этой точки, где эта плотность должна быть бесконечной. Однако объёмный интеграл от этой плотности должен равняться полному заряду рассматриваемой частицы. Поставленному условию удовлетворяет известная δ-функция Дирака, определяемая равенствами

$$\left.\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) &= 0 \qquad (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_1), \\ \int \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\, dV &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{11.69}$$

где $\boldsymbol{r}_1$ — радиус-вектор данной частицы. Из этих равенств следует также, что если $f(\boldsymbol{r})$ есть некоторая функция $\boldsymbol{r}$, то

$$\int f(\boldsymbol{r})\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\, dV = f(\boldsymbol{r}_1). \tag{11.70}$$

Поэтому для группы из n частиц функция плотности $\rho(\boldsymbol{r})$ будет иметь вид

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i), \tag{11.71}$$

где q_i — заряд i-й частицы, а $\boldsymbol{r}_i$ — её радиус-вектор.

Из (11.70) следует, что если $\rho(\boldsymbol{r})$ определяется формулой (11.71), то интеграл

$$\int \rho(\boldsymbol{r})\left\{\varphi(\boldsymbol{r}) - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}{c}\right\} dV$$

равен

$$\sum_i q_i\left[\varphi(\boldsymbol{r}_i) - \frac{\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)}{c}\right].$$

Следовательно, если в поле имеется n заряженных частиц, то полный лагранжиан этого поля будет иметь вид

$$L = \int \frac{E^2 - B^2}{8\pi}\, dV - \sum_i q_i\left(\varphi_i - \frac{\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{A}_i}{c}\right) \tag{11.72}$$

(φ_i и A_i берутся при $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_i$). Сравнивая выражения (11.72) и (1.61), видим, что входящая в (11.72) сумма есть обобщённый потенциал системы, состоящей из n заряженных частиц. Поэтому можно объединить лагранжианы (1.61) и (11.72), добавив к (11.72) кинетическую энергию этих частиц:

$$L=\int\frac{E^2-B^2}{8\pi}\,dV-\sum_i q_i\left(\varphi_i-\frac{\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{A}_i}{c}\right)+\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2, \qquad (11.73)$$

что можно записать также в виде

$$L=\int\left\{\frac{E^2-B^2}{8\pi}-\sum_i q_i\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\left(\varphi-\frac{\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{A}}{c}\right)\right\}dV+\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2. \qquad (11.73')$$

Это выражение, так же как и выражение (11.73), является лагранжианом системы, состоящей из электромагнитного поля и n заряженных частиц. Оно является функцией обобщённых координат $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)$, а также обобщённых координат $\boldsymbol{r}_i$. Таким образом, мы одновременно описываем две системы: электромагнитное поле и находящиеся в нём частицы. Пользуясь теперь принципом Гамильтона и варьируя только потенциалы, получим уравнения Максвелла для электромагнитного поля, а варьируя координаты частиц, получим уравнения движения этих частиц. Заметим, что первый член выражения (11.73) представляет собой лагранжиан поля в случае отсутствия заряженных частиц, а последний — лагранжиан этих частиц в случае отсутствия поля. Средний член этого выражения, очевидно, отражает взаимодействие поля и заряженных частиц.

Мы видели, что вариационные принципы позволяют получить компактное и изящное описание поля. Может, однако, возникнуть вопрос: каковы практические преимущества этого метода по сравнению с методом непосредственного составления уравнений поля? На это следует ответить, что наиболее важные преимущества проявляются здесь в области, лежащей за пределами классической физики. Поэтому мы остановимся на них совсем кратко.

Во-первых, этот метод позволяет получать новые поля и исследовать их свойства. Дело в том, что при выборе возможного выражения для $\mathfrak{L}$ мы всегда ограничены тем требованием, что $\mathfrak{L}$ должно содержать только координаты и их первые производные по x_i и t и, кроме того, должно быть инвариантом Лоренца. Пусть, например, имеется только одна обобщённая координата η, которая должна быть инвариантным скаляром (или псевдоскаляром). Тогда указанным требованиям будут отвечать только члены вида

$$\eta, \quad \sum_\mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_\mu}\right)^2, \quad \sum_\mu A_\mu\frac{\partial\eta}{\partial x_\mu},$$

где A_μ — внешний инвариантный вектор (или псевдовектор). Поэтому в случае скалярного поля любое $\mathfrak{L}$ должно быть комбинацией этих членов. Этим путём можно исследовать многие общие свойства такого скалярного поля, не зная его физической сущности. Последнее время этим методом часто пользуются в теоретических работах по полям мезонов.

Второе применение рассматриваемого метода относится к квантованию полей. Мы знаем, что переход от классической теории к квантовой можно осуществить через канонические переменные системы. Мы отмечали, что классическим скобкам Пуассона от функций канонических координат соответствуют при этом квантовые коммутационные соотношения. В сущности, мы только тогда умеем квантовать систему, когда можем говорить о ней на языке механики. Поэтому, если мы хотим построить квантовую теорию электромагнитного или какого-либо другого поля, то сначала нужно получить его описание на языке механики. Основу для такого описания дают методы Лагранжа и Гамильтона, изложенные в этой главе.

Задачи

1. (a) Поперечные колебания растянутой струны можно апроксимировать колебаниями системы, состоящей из равноотстоящих материальных точек, расположенных на невесомой упругой нити. Покажите, что при сближении этих точек лагранжиан такой системы стремится к пределу

$$L=\frac{1}{2}\int\left[\mu\dot{\eta}^2-T\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]dx,$$

где T — первоначальное натяжение струны. Каковы здесь уравнения движения, если плотность μ есть функция x?

(b) Получите лагранжиан для непрерывной струны, рассмотренной в задаче (a), непосредственно вычисляя её кинетическую и потенциальную энергии. (Потенциальная энергия равна работе силы T при растяжении струны во время колебаний.)

2. Получите уравнения Гамильтона для непрерывной системы, исходя из модифицированного принципа Гамильтона (11.58) и следуя процедуре, описанной в § 7.4.

3. Покажите, что если за независимые переменные поля принять ψ и ψ^*, то удельный лагранжиан

$$\mathfrak{L}=\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla\psi\cdot\nabla\psi^*+V\psi^*\psi+\frac{h}{4\pi i}(\psi^*\dot{\psi}-\psi\dot{\psi}^*)$$

приведёт к уравнению Шрёдингера

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2\psi+V\psi=\frac{h}{4\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

и к соответствующему комплексно сопряжённому уравнению. Каков здесь канонический импульс? Получите удельный гамильтониан, соответствующий этому $\mathfrak{L}$.

4. Покажите, что если удельный гамильтониан не является явной функцией η_k, то интеграл

$$G_i=-\int\sum_k \pi_k\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\,dV$$

будет величиной постоянной.

Величина G_i является аналогом полного количества движения поля в направлении x_i, а эта теорема — аналогом теоремы о сохранении количества движения дискретных систем (см. § 8.6).

5. Удельный лагранжиан электромагнитного поля даётся релятивистской ковариантной формой

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{16\pi}\sum_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)^2 - \frac{1}{8\pi}\sum_{\mu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)^2 + \sum_{\mu}\frac{j_\mu A_\mu}{c},$$

где A_μ — 4-вектор потенциала, а j_μ — 4-вектор с составляющими j и $i\rho$. Покажите, что этот лагранжиан приводит непосредственно к волновым уравнениям

$$\Box^2 A_\mu = \frac{4\pi j_\mu}{c}.$$

Покажите также, что он идентичен лагранжиану, который рассматривался в этом параграфе (за исключением среднего члена, который в любом случае равен нулю вследствие калибровочного условия).

Рекомендуемая литература

T. C. Slater and N. H. Frank, Mechanics.

Излагая механику непрерывных систем, мы только составляли уравнения движения, но не рассматривали их решений, так как для исследования колебаний струн, мембран, жидкостей и твёрдых тел потребовался бы целый том. В книге Слэтера и Франка этим вопросам посвящена почти половина всего объёма. Эта книга написана легко, а местами даже элементарно и может служить введением в рассматриваемый предмет. Переход от дискретной струны к непрерывной в случае поперечных колебаний рассмотрен здесь в главе VII.

Lord Rayleigh, The Theory of Sound.

Эта монография содержит много материала по колебаниям непрерывных тел. Исследование волнового уравнения, описывающего распространение звука в газе, проводится в главе XI, т. 2, где весьма подробно рассматривается адиабатическое и изотермическое движение газа.

G. Wentzel, Introduction to the Quantum Theory of Fields.

Классическая механика весьма подробным и исчерпывающим образом рассматривается во многих классических работах. Однако многие вопросы этой теории рассматриваются и в книгах по квантовой механике, так как классическая теория поля является предшественницей квантовой теории поля. Одним из лучших источников такого рода, по-видимому, является отлично написанная книга Вентцеля, в особенности её первая глава.

Ценный материал по этим вопросам содержится также в главах XIII и XIV книги L. I. Schiff, Quantum Mechanics. В частности, последняя глава посвящена электромагнитному полю. Из более ранних источников можно назвать книгу: W. Heisenberg, The Physical Principles of Quantum Theory, § 9, Приложения, а также одну из самых ранних работ по теории поля, не утратившую до настоящего времени своей ценности: W. Heisenberg und W. H. Pauli, Zeitschr. f. Phys. 56, 1, 1929.

БИБЛИОГРАФИЯ

Книги, которые были изданы в последнее время (например, многие немецкие книги), приводятся в этом списке с указанием в скобках места и даты издания.

Если приведённая здесь книга была указана ранее в списке рекомендуемой литературы к каждой главе, то в скобках указывается номер этой главы.

Работы по общей классической механике

1. Ames Joseph Sweetman and Murnaghan Francis D., Theoretical Mechanics. Boston, Ginn and Company, 1929.
2. Appell Paul, Traité de Mécanique Rationelle (в 5 томах), изд. 2-е. Paris, Gauthier-Villars, 1902—1937.
3. Coe Carl Jeness, Theoretical Mechanics. New York, Macmillan Co., 1938 (гл. 1).
4. Destouche Jean Louis, Principes de la Mécanique Classique. Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1948.
5. Lamb Horace, Higher Mechanics, изд. 2-е. Cambridge, Cambridge University Press, 1929.
6. MacMillan William Duncan, Theoretical Mechanics. New York, McGraw-Hill. Т. 1: Statics and the Dynamics of a Particle, 1927 (гл. 3). Т. 3: Dynamics of Rigid Bodies, 1936 (гл. 5).
7. Milne E. A., Vectorial Mechanics. New York, Interscience Publishers, 1948 (гл. 1, 5).
8. Osgood William F., Mechanics. New York, Macmillan, 1937. (Гл. 1, 2, 4.)
9. Schaefer Clemens, Einführung in die Theoretische Physik. Т. 1: Mechanik materiellen Punkte; Mechanik starren Körper und Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydrodynamik), изд. 3-е. Berlin, Walter de Gruyter, 1929. (Ann Arbor, J. W. Edwards, 1948.)
10. Slater John C. and Frank Nathaniel H., Mechanics. New York, McGraw-Hill, 1947. (Гл. 3, 11.)
11. Sommerfeld Arnold, Vorlesungen über Theoretische Physik. Т. 1: Mechanik, изд. 4-е. Wiesbaden, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, 1949. (Гл. 2, 3, 5.)
12. Synge John L. and Griffith Byron A., Principles of Mechanics, изд. 2-е. New York, McGraw-Hill, 1949. (Гл. 1, 5.)
13. Timoshenko S. and Young D. H., Advanced Dynamics. New York, McGraw-Hill, 1948. (Гл. 5, 10.)
14. Webster Arthur Gordon, The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies. Leipzig, B. G. Teubner, 1904. (New York, Stechert-Hafner, 1920.) (Гл. 7, 10.)
15. Whittaker E. T., A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, изд. 4-е. Cambridge, Cambridge University Press, 1937. (New York, Dover Publications, 1944.) (Гл. 1-4, 7, 8, 10.)

16. Whittaker E. T., Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. T. т. IV_1, IV_2: Mechanik, A: Grundlagung der Mechanik; B: Mechanik der Punkte und Starren Systeme. Leipzig, B. G. Teubner, 1901—1935.

17. Whittaker E. T., Handbuch der Physik. T. V: Grundlagen der Mechanik der Punkte und Starren Körper. Berlin, Julius Springer, 1927. (Гл. 1, 5, 7, 8, 9.)

Работы по специальным вопросам классической механики

18. Bergmann Peter Gabriel, Introduction to the Theory of Relativity. New York, Prentice-Hall, 1942. (Гл. 6.)

19. Byerly William Elwood, An Introduction to the Use of Generalized Coordinates in Mechanics and Physics. Boston, Ginn & Co., 1913. (Гл. 2.)

20. Charlier Carl Ludwig, Die Mechanik des Himmels (в 2 томах), изд. 2-е. Berlin, Walter de Qruyter, 1927. (Гл. 9.)

21. Davidson Martin, The Gyroscope and Its Applications, London, Hutchinson, 1947. (Гл. 5.)

22. Einstein Albert, The Meaning of Relativity, изд. 3-е. Princeton, Princeton University Press, 1950. (Гл. 6.)

23. Gray Andrew, A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. London, Macmillan Co., 1918. (Гл. 5.)

24. Kasner Edward, Differential-Geometric Aspects of Dynamics. New York, American Mathematical Society, 1913.

25. Klein Felix, The Mathematical Theory of the Top. New York, Scribners, 1897. (Гл. 5.)

26. Klein Felix and Sommerfeld Arnold, Ueber die Theorie des Kreisels (в 4 томах). Leipzig, B. G. Teubner, 1897—1910. (Гл. 5.)

27. Lanczos Cornelius, The Variational Principles of Mechanics. Toronto, University of Toronto Press, 1949.

28. Mach Ernst, The Science of Mechanics (изд. 5-е англ.) LaSalle, Illinois, Open Court Publishing Co., 1942. (Гл. 1.) (Русский перевод: Мах Э., Механика, СПБ, 1909.)

29. Newboult H. O., Analytical Method in Dynamics. Oxford, Oxford University Press, 1946. (Гл. 4.)

30. Olson Harry F., Dynamical Analogies. New York, D. Van Nostrand, 1946. (Гл. 2.)

31. Pauli Wolfgang Jr., Relativitäts Theorie. Leipzig, B. G. Teubner, 1921.

32. Poincaré Henri, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste (в 3 томах). Paris, Gauthier-Villars, 1892—1899. (Гл. 9.)

33. Routh E. J., The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies, изд. 6-е. London, Macmillan, 1905.

34. Schaefer Clemens, Die Prinzipe der Dynamik. Berlin, Walter de Gruyter, 1919. (Гл. 7.)

35. Thomson J. J., Applications of Dynamics to Physics and Chemistry. London, Macmillan, 1888. (Гл. 2.)

36. Wintner Aurel, The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton, Princeton University Press, 1941.

Работы по различным разделам физики и математики, представляющим интерес для классической механики

37. Becker R., Theorie der Elektrizität. T. II: Elektronentheorie, изд. 6-е, Leipzig, B. G. Teubner, 1933. (Ann Arbor, J. W. Edwards, 1946.) (Гл. 6.)

38. Bergmann Peter Gabriel, Basic Theories of Physics: Mechanics and Electrodynamics. New York, Prentice-Hall, 1949.

39. Bliss Gilbert Ames, Calculus of Variations (Carus Mathematical Monographs, 1). LaSalle, Illinois, Open Court Publishing Co., 1925. (Гл. 2.)
40. Bôcher Maxime, Introduction to Higher Algebra. New York, Macmillan, 1907. (Гл. 4, 10.)
41. Born Max, The Mechanics of the Atom, перев. J. W. Fisher'a. London, G. Bell and Sons, 1927. (Гл. 8, 9.)
42. Born Max and Jordan Pascual, Elementare Quantenmechanik. Berlin, Julius Springer, 1930. (Ann Arbor, J. W. Edwards, 1946.) (Гл. 8.)
43. Brand Louis, Vector and Tensor Analysis. Vew York, John Wiley & Sons, 1947.
44. Brillouin Léon, Les Tenseurs en Mècanique et en Élasticité. Paris, Masson et cie, 1938. (New York, Dover Publications, 1946.) (Гл. 4, 9.)
45. Carathéodory Constantin, Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung. Leipzig, B. G. Teubner, 1935. (Ann Arbor, J. W. Edwards, 1945.) (Гл. 8, 9.)
46. Courant R. and Hilbert D., Methoden der Mathematischen Physik (в 2 томах), изд. 2-е. Berlin, Julius Springer, 1931—1937. (New York, Interscience Publishers, 1943.) (Гл. 4.)
47. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, изд. 3-е. Oxford, Oxford University Press, 1944. (Гл. 8.)
48. Epstein Paul S., Textbook of Thermodynamics. New York, John Wiley & Sons, 1937. (Гл. 7.)
49. Frank Philipp and von Mises Richard, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik (в 2 томах), изд. 2-е. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1930—1935. (New York, Mary S. Rosenberg, 1943.) (Гл. 8, 9.) (Русский перевод: Франк П. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.)
50. Gibbs J. Willard, Vector Analysis, изд. E. B. Wilson'a. New York, Scribner, 1901. (New Haven, Yale University Press, 1931.) (Гл. 5.)
51. Guillemin Ernst A., The Mathematics of Circuit Analysis. New York, John Wiley & Sons, 1949. (Гл. 10.)
52. Heisenberg Werner, The Physical Principles of the Quantum Theory, перев. Carl Eckart and Frank C. Hoyt. Chicago, University of Chicago Press, 1930. (New York, Dover Publications, 1949.) (Гл. 11.)
53. Herzberg Gerhard, Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules. New York, D. Van Nostrand, 1945. (Гл. 4, 10.)
54. Jeffreys H. and Jeffreys Bertha S., Methods of Mathematical Physics. Cambridge, Cambridge University Press, 1946. (Гл. 4.)
55. Joos Georg, Theoretical Physics, перев. I. M. Freeman. New York, G. E. Stechert, 1934. (Гл. 1.)
56. Lamb Horace, Hydrodynamics, изд 6-е. Cambridge, Cambridge University Press, 1932. (New York, Dover Publications, 1945.)
57. Levi-Civita Tullio, The Absolute Differential Calculus, перев. M. Long. London, Blackie & Son, 1929.
58. Lindsay Robert Bruce, Introduction to Physical Statistics. New York, John Wiley & Sons, 1941. (Гл. 3.)
59. Lindsay Robert Bruce and Margenau Henry, Foundations of Physics. New York, John Wiley & Sons, 1936. (Гл. 1, 6, 7.)
60. Margenau Henry and Murphy George Moseley, The Mathematics of Physics and Chemistry. New York, D. Van Nostrand, 1943.
61. Morse Philip M., Vibration and Sound, изд. 2-е. New York, McGraw-Hill, 1948.
62. Lord Rayleigh, The Theory of Sound (в 2 томах), изд. 2-е. London, Macmillan, 1894—1896. (New York, Dover Publications, 1945.) (Гл. 1, 10, 11.) [Русский перевод: Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей), Теория звука. Гостехиздат, 1955.]
63. Schiff Leonard I., Quantum Mechanics. New York, McGraw-Hill, 1949. (Гл. 11.)

64. Sommerfeld Arnold, Atomic Structure and Spectral Lines, перев. H. L. Brose с 5-го нем. изд. 1931. New York, E. P. Dutton, 1934. (Гл. 8, 9.)

65. Sommerfeld Arnold, Vorlesungen über Theoretische Physik. T. III: Elektrodynamik. Wiesbaden, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, 1948.

66. Tolman Richard C., The Principles of Statistical Mechanics. Oxford, Oxford University Press, 1938. (Гл. 8.)

67. Van Vleck J. H., Quantum Principles and Line Spectra. Washington, National Research Council, 1926. (Гл. 9.)

68. Wentzel Gregor, Quantum Theory of Fields, перев. C. Houtermans'a и J. W. Jauch'a. New York, Interscience Publishers, 1949. (Гл. 11.)

69. Wigner Eugen, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1931. (Ann Arbor, J. W. Edwards, 1944.)

70. Wills A. P., Vector Analysis, with an Introduction to Tensor Analysis. New York, Prentice-Hall, 1931. (Гл. 5.)

71. Zemansky Mark W., Heat and Thermodynamics, изд. 2-е. New York, McGraw-Hill, 1943.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символы, применяемые в этой книге, выбирались так, чтобы они по возможности не отличались от общепринятых. Дифференцирование по времени обозначено точкой над соответствующей буквой. Величины, полученные в результате всякого рода преобразований, часто обозначаются штрихами. В гл. 4 штрихи над символами, обозначающими координаты, относятся к системе осей, связанных с телом, в отличие от системы неподвижных осей.

При рассмотрении канонических преобразований первоначальные переменные обозначаются строчными буквами, а преобразованные — прописными. Начальные значения, а также величины, характеризующие состояние равновесия, обычно снабжаются индексом нуль. Комплексно сопряженные величины, как это обычно принято, обозначаются звёздочкой.

Приводимый ниже список обозначений не является полным; в нём приводятся лишь наиболее важные обозначения, а также те из них, которые, возможно, могли бы вызвать путаницу вследствие того, что одним и тем же символом иногда обозначаются различные величины.

A площадь,
A составляющая угловой скорости, перпендикулярная к $\boldsymbol{L}$,
A действие,
A величина, характеризующая амплитуду световой волны,
A, B, C составляющие векторной функции $\boldsymbol{F}$,
A^{μ} четырёхмерный векторный потенциал,
$\boldsymbol{A}$ электромагнитный векторный потенциал,
A, B, C и т. д. ортогональные матрицы,
A матрица пространственного поворота,
$\mathsf{A} = (a_{ik})$ матрица главных колебаний,
A^{-1} матрица, обратная матрице A,
$\tilde{\mathsf{A}}$ транспонированная матрица A,
$\mathsf{A}^{\dagger}$ матрица, эрмитовски сопряженная с матрицей A,
$|\mathsf{A}|$ детерминант матрицы A,
a большая полуось,
a константа движения тяжёлого симметричного волчка,
a расстояние между соседними массами в задаче о продольных колебаниях бесконечно длинного упругого стержня,
a, a_j, a_{ik} коэффициенты в выражении для кинетической энергии,
a_{lk} коэффициенты в уравнении неголономной связи,
a_{ij} элементы матрицы ортогонального преобразования,
$a_{\mu\nu}$ элементы матрицы преобразования Лоренца,
a_j коэффициенты Фурье,
a_i, a_{ik} амплитуды главных колебаний,
$\boldsymbol{a}$ ускорение,
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_k$ собственный вектор, соответствующий данному главному колебанию,
$\boldsymbol{B}$ магнитная индукция,
B матрица поворота, соответствующая углу Эйлера ψ,

b малая полуось эллипса,
b константа движения тяжёлого симметричного волчка,
b равновесное расстояние между соседними атомами линейной трёхатомной молекулы,
C_j ёмкость,
C постоянная интегрирования в задаче Кеплера,
C, C_k скалярные множители в формуле для главных колебаний,
C матрица поворота, соответствующая углу Эйлера φ,
C_i коэффициенты, ортогонализирующие собственные векторы,
D плотность изображающих точек в фазовом пространстве,
D детерминант,
$\boldsymbol{D}$ электрическое смещение,
D матрица поворота, соответствующая углу Эйлера θ,
E полная энергия,
E_j электродвижущая сила,
E' константа движения тяжелого симметричного волчка,
$\boldsymbol{E}$ напряжённость электрического поля,
e заряд электрона ($-4{,}80 \cdot 10^{-10}$ esu),
$F(\rho)$ функция, определяющая эллипсоид инерции,
F_1, F_2, F_3, F_4 производящие функции,
F, G функции, входящие в скобки Пуассона,
$\boldsymbol{F}$ сила,
$\boldsymbol{F}^{(a)}$ активная сила,
$\boldsymbol{F}^{(e)}$ внешняя сила,
$\boldsymbol{F}(q, p)$ произвольная векторная функция q и p,
$\mathfrak{F}$ диссипативная функция Рэлея,
$\mathfrak{F}_i$ коэффициенты диагонализированной диссипативной функции,
$\mathfrak{F}_{ij}$ коэффициенты диссипативной функции,
$f(r)$ величина центральной силы,
$f'(r) = f(r) + l^2/mr^3$ сила, фигурирующая в эквивалентной одномерной задаче,
f символ функциональной зависимости,
$f_i(q, t)$ произвольная функция, фигурирующая в производящей функции точечного преобразования,
$\boldsymbol{f}_i$ реакция связи,
G гравитационная постоянная,
G производящая функция, включающая преобразование времени,
G произвольная функция объёма,
$G(q, p)$ производящая функция бесконечно малого контактного преобразования,
$G_i(\omega)$ преобразование Фурье для возмущающей силы,
$\boldsymbol{G}$ произвольный преобразуемый вектор,
g ускорение силы тяжести,
H гамильтониан,
H' ковариантный гамильтониан,
$\mathfrak{H}$ гамильтониан единицы объёма,
$\boldsymbol{H}$ напряжённость магнитного поля,
h постоянная Планка,
I определённый интеграл от лагранжиана,
I интенсивность (плотность потока),
I момент инерции,
I_1, I_2, I_3 главные моменты инерции,
I_j сила тока,
I_{xz}, I_{ij} моменты инерции,
$\boldsymbol{I}$ тензор инерции,
i сила тока,

i, j, k, l, m, n индексы суммирования,
$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные векторы,
J функционал в вариационной задаче,
J_i действие,
J_n интегральный инвариант Пуанкаре,
j_μ 4-вектор с составляющими j и $i\rho$,
$\boldsymbol{j}$ плотность тока,
K преобразованный гамильтониан,
K_ν сила Минковского,
k_x, k_y, k_z коэффициенты в выражении для диссипативной функции,
k коэффициент в выражении для центральной силы,
k коэффициент жёсткости в задаче о гармоническом осцилляторе,
k радиальное квантовое число,
k волновое число,
k_0 волновое число в вакууме,
$\boldsymbol{k}$ волновой вектор,
L лагранжиан,
L эйконал,
L' ковариантный лагранжиан,
L_i лагранжиан на единицу длины в задаче о продольных колебаниях бесконечно длинного упругого стержня,
L_j самоиндукция,
$\boldsymbol{L}$ вектор кинетического момента,
$\mathfrak{L}$ удельный лагранжиан,
l длина,
l величина полного кинетического момента,
l расстояние от неподвижной точки до центра тяжести симметричного волчка,
M масса всей системы,
M_{jk} коэффициенты взаимной индукции,
$\boldsymbol{M}$ магнитный момент,
m масса,
m число уравнений связей,
m порядок вырождения,
m магнитное квантовое число,
m_l продольная масса,
m_r релятивистская масса,
m_t поперечная масса,
m_{ik} коэффициенты фундаментальной метрической формы (коэффициенты в выражении для кинетической энергии),
N число частиц системы,
$\boldsymbol{N}$ векторный момент силы (вращающий момент),
$\boldsymbol{N}^{(e)}$ момент внешних сил,
n число независимых координат, или число степеней свободы,
n показатель степени в случае степенного закона изменения центральной силы,
n главное квантовое число,
n показатель преломления,
$\boldsymbol{n}$ единичный вектор,
P давление,
$\boldsymbol{P}$ вектор количества движения системы,
P комплексная квадратная матрица второго порядка, характеризующая положение точки в пространстве,
p величина полного кинетического момента,
p_j канонический импульс,
p_ν 4-вектор мирового количества движения,
$\boldsymbol{p}$ вектор количества движения,

Q обобщённая сила,
Q_i, P_i преобразованные канонические координаты и импульсы,
$\mathbf{Q}$ унитарная матрица, составленная из параметров Кэйли — Клейна,
q обобщённая координата,
q электрический заряд,
R раусиан,
R_j электрическое сопротивление,
R_0 радиус инерции,
$\boldsymbol{R}$ радиус-вектор центра масс,
r полярный радиус,
$\boldsymbol{r}$ радиус-вектор,
S произвольная поверхность,
S главная функция Гамильтона,
S_j импульс,
$\mathbf{S}$ матрица инверсии,
s параметр соударения,
s число циклических координат,
s, $d\boldsymbol{s}$ длина дуги,
T кинетическая энергия,
T_{ij} коэффициенты в разложении кинетической энергии в ряд около положения равновесия,
$T_{lnm\ldots}$ элементы тензора,
$\mathbf{T}$ матрица, составленная из коэффициентов T_{ij},
$\mathfrak{T}$ удельная кинетическая энергия,
t время,
U обобщённый потенциал,
$u = 1/r$ (в задаче о центральных силах),
$u = \cos \theta$,
u скорость распространения волны,
u, v оси комплексного двумерного пространства,
u, v криволинейные координаты на двумерной поверхности,
u, v, w произвольные функции от q, p,
u_l $2n$ независимых функций от q, p,
u_ν 4-скорость,
V потенциальная энергия,
V объём,
V' фиктивный потенциал в эквивалентной одномерной задаче о движении под действием центральной силы,
V_{ij} коэффициенты в разложении потенциальной энергии в ряд около положения равновесия,
$\mathbf{V}$ матрица, составленная из коэффициентов V_{ij},
$\mathfrak{B}$ удельная потенциальная энергия,
$\boldsymbol{v}$ вектор скорости,
W работа,
$W = \sum\limits_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i$, (см. вириал Клаузиуса, стр. 85),
W характеристическая функция Гамильтона,
W' периодическая производящая функция,
W_i характеристическая функция Гамильтона в задаче о разделении переменных,
w_i угол (в переменных действие — угол),
X, Y, Z декартовы координаты центра масс,
X, Y, Z; X_1, X_2, X_3 или X_{ik} составляющие собственных векторов,
$\mathbf{X}$ матрица из собственных векторов,
x, y, z декартовы координаты,
$x_i = x_1$, x_2, x_3 декартовы координаты,
$x_\mu = x_1$, x_2, x_3, x_4 декартовы координаты в пространстве Минковского,

x величина, характеризующая нутацию волчка,
$x_{\pm} = x \pm iy$,
x_μ 4-вектор, определяющий положение точки в пространстве Минковского,
$\mathbf{x}$ матрица, состоящая из одного столбца,
Y модуль Юнга,
Z атомный номер,
α параметр, характеризующий кривую (при вычислении вариации интеграла),
α, β постоянные в задаче о движении тяжелого симметричного волчка,
α, β, γ, δ параметры Кэйли — Клейна,
α_i постоянный импульс, соответствующий циклической координате,
α_i, β_i, γ_i направляющие косинусы,
α_1 энергия (как один из постоянных импульсов),
α_θ постоянный импульс в задаче Кеплера (в переменных действие — угол),
α_φ кинетический момент, соответствующий координате φ,
$\beta = v/c$,
β_i постоянные интегрирования,
γ отношение удельной теплоёмкости при постоянном давлении к удельной теплоёмкости при постоянном объёме,
γ_i преобразованные постоянные импульсы,
Δ приращение,
Δ символ вариации, включающей вариацию времени,
δr_i виртуальное перемещение,
δ символ вариации при постоянном t,
δq_i, δp_i бесконечно малое приращение координат и импульсов,
δ_k начальная фаза,
δ_{lm} символ Кронекера,
δ_{ijk} символ Леви-Чивита,
$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$ δ-функция Дирака,
ϵ эксцентриситет,
ϵ параметр, характеризующий бесконечно малое контактное преобразование,
$\boldsymbol{\epsilon}$ матрица бесконечно малого поворота,
ζ_j главные координаты,
$\boldsymbol{\zeta}$ матрица, составленная из главных координат,
$\eta(x)$ варьируемая кривая (при вычислении вариации интеграла),
$\eta(x)$, $\eta_i(x_k)$ обобщённые координаты непрерывной системы,
η_i обобщённые координаты системы вблизи положения равновесия,
$\boldsymbol{\eta}$ вектор перемещения частицы газа,
$\boldsymbol{\eta}$ матрица, составленная из координат η_i,
Θ угол рассеяния в системе координат, движущейся вместе с центром масс,
θ угол,
θ полярный угол,
θ азимутальный угол в сферических полярных координатах,
θ угол Эйлера,
θ широта, отсчитываемая от полюса,
θ параметр, определяющий положение точки на траектории в пространстве конфигураций,
θ' полярный угол, определяемый начальными условиями в задаче Кеплера,
ϑ угол рассеяния в лабораторной системе координат,
$\varkappa$ коэффициент демпфирования,
λ собственное значение,
λ длина волны,
λ_l неопределённый множитель Лагранжа,
$\boldsymbol{\lambda}$ диагональная матрица, составленная из собственных значений.
μ приведённая масса,

μ масса на единицу длины,
μ плотность,
μ, ν, λ, и т. д. индексы суммирования в специальной теории относительности (пробегающие значения от 1 до 4),
ν частота,
ν_i постоянные интегрирования,
ν_i частота периодического движения,
ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' оси, определяющие углы Эйлера,
π удельный импульс,
ρ удельный заряд,
ρ плотность,
ρ радиус кривизны,
$d\rho$ длина дуги в пространстве конфигураций,
$\boldsymbol{\rho}$ радиус-вектор точки на поверхности эллипсоида инерции,
σ относительное изменение плотности,
σ (Ω) поперечное сечение рассеяния в данном направлении,
σ_t полное поперечное сечение рассеяния,
σ_x, σ_y, σ_z спиновые матрицы Паули,
τ интервал времени,
τ период обращения планеты,
τ собственное время,
τ_i периоды движения,
Φ угол поворота, осуществляемого ортогональной матрицей,
φ угол,
φ электромагнитный скалярный потенциал,
φ угол Эйлера,
φ полярный угол,
φ азимутальный угол в сферических полярных координатах,
φ скалярная величина, характеризующая распространение световой волны,
ψ широта в сферических полярных координатах, отсчитываемая от полюса,
ψ угол Эйлера,
ψ скалярная функция в волновом уравнении,
ψ полярный угол в плоскости орбиты,
ψ функция в волновом уравнении Шрёдингера,
ψ (q, p, t) функция, выражающая условие, накладываемое на канонические переменные,
Ω угол, характеризующий направление в задаче о рассеянии,
Ω угловая скорость прецессии,
$d\Omega$ вектор бесконечно малого поворота,
ω угловая скорость,
ω_i постоянные интегрирования,
$\boldsymbol{\omega}_l$ частота прецессии Лармора,
1 единичная матрица,
$\oint$ интеграл по замкнутому контуру,
∇ оператор набла,
$\Box$ оператор 4-градиента,
$\Box^2$ оператор Даламбера,
$\{u, v\}$ скобки Лагранжа относительно u, v,
$[u, v]$ скобки Пуассона относительно u, v,
$\frac{\delta}{\delta}$ — символ функциональной производной.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ