# ПОЛЗУЧЕСТЬ УПРУГО-ВЯЗКИХ СРЕД С ЯДРОМ ТИПА ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В. Ф. ЛИСТОВНИЧИЙ, Т. Д. ШЕРМЕРГОР

(*Москва*)

Использование динамических методов исследования показывает, что большинство твердых тел обладает достаточно широким релаксационным спектром. Однако на практике приходится иметь дело с ограниченными интервалами времени $(t_1, t_2)$. Очевидно, на интервале $(t_1, t_2)$ будут проявляться не все релаксационные процессы, а лишь те, функция распределения времен релаксаций $H(\tau)$ для которых ограничена временами $(\tau_1, \tau_2)$, причем $\tau_1 \leqslant t_1$, $\tau_2 \geqslant t_2$. Поэтому для описания релаксации напряжений и ползучести линейных упруго-вязких материалов с достаточной степенью точности можно ограничиться обрезанной функцией распределения, а влияние участков спектра, лежащих вне интервала $(\tau_1, \tau_2)$ учесть интегрально. Очевидно, для $t < t_1$, когда основную роль играет область $\tau$, лежащая слева от $\tau_1$, будет наблюдаться «мгновенная» релаксация напряжений при заданной деформации и некоторая дополнительная «мгновенная» деформация ползучести, если материал находится под действием постоянного напряжения.

Если форма начальных участков кривых (для $t \geqslant t_1$) не играет существенной роли, то соответствующие дополнительные мгновенные напряжения и деформации могут быть учтены перенормировкой упругих модулей и податливостей. Соответствующая техника изложена, например, в работе [1]. Участки спектра, лежащие справа от отрезка $(\tau_1, \tau_2)$ за время наблюдения практически не проявятся и поэтому их можно не принимать в расчет.

Имея в виду такой подход, будем описывать ползучесть упруго-вязкого материала при помощи ядра вида ${}_1F_1(\alpha+1, 2, -t/\tau_\varepsilon)$. Как показано ранее [2], такие ядра приводят к релаксационному спектру, отличающемуся от соответствующей функции распределения ядра Ржаницына — Дэвидсона [3, 4] инверсией времен релаксаций и могут быть использованы для описания наследственных свойств полимеров в области перехода из стеклообразного в высокоэластичное состояние.

**1.** Определим интегральные операторы упругих модулей $M^*$ и податливостей $J^*$ равенствами

$$M^* = M_\infty(1 - qR^*) = M_0(1 + pS^*D), \qquad D = \partial/\partial t \tag{1.1}$$

$$J^* = J_\infty(1 + pK^*) = J_0(1 - qP^*D) \tag{1.2}$$

Безразмерные интегральные операторы $R$ и $K$, а также параметры $q$ и $p$ должны удовлетворять следующим нормировочным соотношениям:

$$R = -DS > 0, \qquad K = -DP > 0, \qquad S(0) = P(0) = 1 \tag{1.3}$$

$$p = q/m, \qquad q = 1 - m, \qquad m = M_0/M_\infty = J_\infty/J_0 \tag{1.4}$$

Здесь $M_\infty$ и $M_0$ — соответственно нерелаксированное и релаксированное значения упругих модулей (для определенности — модулей сдвига) и аналогично для податливостей.

Ядро типа вырожденной гипергеометрической функции может быть определено следующим выражением Фурье-образа интегрального оператора упругого модуля

$$M(i\omega) = M_0 + (M_\infty - M_0)(1 + 1/i\omega\tau_\varepsilon)^{-\alpha} \tag{1.5}$$

где $\tau_0$ — характерное время релаксации, $\alpha$ — параметр дробности.

Из равенства (1.5) следует

$$S(t) = {}_1F_1(\alpha, 1, -\theta), \qquad R(t) = \frac{\alpha}{\tau_\varepsilon}\,{}_1F_1(1+\alpha, 2, -\theta), \qquad \theta = \frac{t}{\tau_\varepsilon} \tag{1.6}$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Интегральные операторы $S$ и $P$ дают функции релаксации и ползучести. Определим функции релаксации и ползучести соотношениями

$$\sigma(t) = M_0[1 + p\varphi(t)]\,\varepsilon(t), \qquad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 1(t) \tag{1.7}$$

$$\varepsilon(t) = J_\infty[1 + p\psi(t)]\,\sigma(t), \qquad \sigma(t) = \sigma_0 1(t) \tag{1.8}$$

$$1(t<0) = 0, \qquad 1(t>0) = 1$$

Тогда будем иметь

$$\varphi = S, \qquad \psi = 1 - P \tag{1.9}$$

Наряду с равенством (1.5), наследственные свойства материала могут быть заданы при помощи аналогичного выражения для Фурье-образа интегрального оператора податливостей

$$J(i\omega) = J_0[1 - q(1 + 1 / i\omega\tau_\sigma)^{-\alpha}] \tag{1.10}$$

Легко видеть, что такой подход эквивалентен замене операторов и времен релаксации

$$P \rightleftarrows K, \qquad S \rightleftarrows P, \qquad \tau_\varepsilon \rightleftarrows \tau_\sigma \tag{1.11}$$

Ниже для определенности будет рассматриваться схема, построенная на базе соотношений (1.5).

2. Перейдем к вычислению ядер $K$ и $P$. Из равенства (1.1) и (1.2) следует

$$(1 - qR^*)^{-1} = 1 + qm^{-1}K^*(q) \tag{2.1}$$

Отсюда

$$\frac{1}{m}K^*(q) = \frac{1}{R^{*-1} - q}, \qquad R^* = \frac{1}{m}K^*(0) \tag{2.2}$$

Из выражений (2.2) видно, что если исходное ядро описывается соотношением (1.6), то ядра $K$ и $P$ могут быть представлены в виде рядов по вырожденным гипергеометрическим функциям [2]

$$K(t) = \frac{\alpha}{\tau_\varepsilon}(1 + p)\sum_0^\infty (n + 1)(-p)^n {}_1F_1[\alpha(n + 1) + 1, 2, -\theta] \qquad (p < 1)$$

$$K(t) = -\frac{\alpha}{\tau_\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{p}\right)\sum_0^\infty n(-p)^{-n} {}_1F_1[\alpha(1 - \alpha n, 2, -\theta] \qquad (p > 1) \tag{2.3}$$

$$P(t) = (1 + p)\sum_0^\infty (-p)^n {}_1F_1[\alpha(n + 1), 1, -\theta] \qquad (p < 1) \tag{2.4}$$

$$P(t) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)\sum_0^\infty (-p)^{-n} {}_1F_1[-\alpha n, 1, -\theta] \qquad (p > 1)$$

Однако вырожденная гипергеометрическая функция сама определяется при помощи ряда. Поэтому для вычисления $K$ и $P$ приходится иметь дело с двойными рядами, что вследствие слабой сходимости рядов для гипергеометрических функций приводит к чрезмерно большому объему вычислительных работ. В этой связи ниже рассматривается другой подход, основанный на обращении функции распределения времен релаксаций.

3. Определим функции распределения времен релаксаций $H(\tau)$ и времен запаздывания $L(\tau)$ соотношениями

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)e^{-t/\tau}d\ln\tau, \qquad \psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\tau)[1 - e^{-t/\tau}]\,d\ln\tau \tag{3.1}$$

Введенные таким образом функции $H$ и $L$ могут быть вычислены, если известен Фурье-образ операторов упругих модулей и податливостей. Соответствующие соотношения имеют вид [5]

$$H\left(\frac{1}{\omega}\right) = \pm\frac{1}{\pi\Delta M}\operatorname{Im} M(\omega e^{\pm i\pi}), \qquad L\left(\frac{1}{\omega}\right) = \mp\frac{1}{\pi\Delta J}\operatorname{Im} J(\omega e^{\pm i\pi}) \tag{3.2}$$

Подставляя сюда выражение $M(\omega)$ согласно равенству (1.1), получим

$$H(\tau)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}-1\right)^{-\alpha}\quad(\tau>\tau_\varepsilon),\qquad H(\tau)=0\quad(\tau<\tau_\varepsilon)\tag{3.3}$$

$$L(\tau)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\xi}{q^2+\xi^2+2q\xi\cos\alpha\pi}\quad(\tau>\tau_\varepsilon),\qquad L(\tau)=0\quad(\tau<\tau_\varepsilon)\tag{3.4}$$

$$\xi\equiv m(\tau/\tau_\varepsilon-1)^\alpha,\qquad q=1-m\tag{3.5}$$

Как видно из приведенных формул, при временах релаксации $\tau$, лежащих не слишком близко к $\tau_\varepsilon$, имеет место зависимость $H\sim\tau^{-\alpha}$, которая при $\alpha={}^1/_2$ совпадает с известной формулой Рауза, описывающей релаксацию полимеров в переходной области [5].

При помощи функции распределения (3.4) равенство (3.1) может быть представлено в виде

$$\psi(t)=1-\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{\tau_\varepsilon}^{\infty}\frac{\xi}{q^2+\xi^2+2q\xi\cos\alpha\pi}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}\tag{3.6}$$

При этом учтено условие нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}L(\tau)\,d\ln\tau=1\tag{3.7}$$

Введем безразмерное время $\theta=t/\tau_\varepsilon$ и перейдем к новой переменной интегрирования $x=\tau_\varepsilon/\tau$, тогда получим

$$\psi=1-I_\alpha(q,\theta),\qquad P=I_\alpha(q,\theta)\tag{3.8}$$

$$I_\alpha(q,\theta)\equiv\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\eta e^{-\theta x}}{q^2+\eta^2+2q\eta\cos\alpha\pi}\frac{dx}{x},\qquad \eta\equiv m\left(\frac{1}{x}-1\right)^\alpha$$

Сопоставляя равенства (3.8) с выражениями (1.3) и (1.9), находим интегральное представление резольвентного ядра

$$K=-\frac{1}{\tau_\varepsilon}\frac{d}{d\theta}I_\alpha(q,\theta)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\tau_\varepsilon}\int\limits_0^1\frac{\eta e^{-\theta x}dx}{q^2+\eta^2+2q\eta\cos\alpha\pi}\tag{3.9}$$

В частном случае $\alpha=q={}^1/_2$ интегрирование приводит к вырожденной гипергеометрической функции

$$\psi=1-{}_1F_1({}^1/_2,\,2,\,-\theta)\tag{3.10}$$

Однако в общем случае произвольных $\alpha$ и $q$ возможно лишь численное интегрирование.

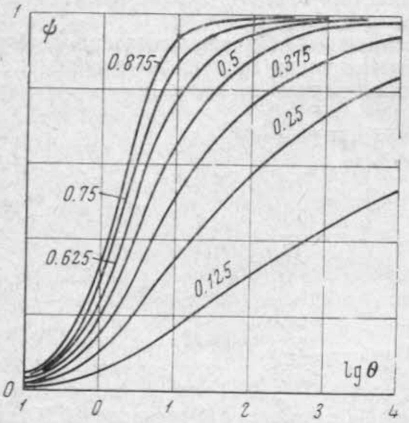
Интегральное представление (3.9) можно получить и непосредственно из разложений (2.3)—(2.4), если воспользоваться интегральным представлением вырожденной гипергеометрической функции

$${}_1F_1(\nu,1,x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\int\limits_0^1 e^{xy}y^{\nu-1}(1-y)^{-\nu}\,dy\tag{3.11}$$

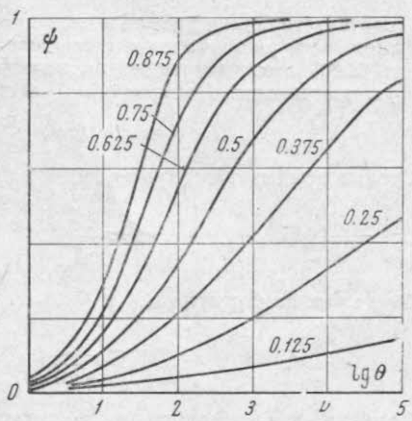
Подставляя равенство (3.11) в каждое из выражений (2.4) и проводя формально суммирование под знаком интеграла, в обоих случаях приходим к интегралу (3.8). Аналогично, формальное суммирование рядов (2.3) при помощи интегрального представления вырожденной гипергеометрической функции приводит в обоих случаях к интегралу (3.9).

Следует подчеркнуть, однако, что такой вывод соотношения (3.9) не может считаться строгим, так как использованное интегральное представление функции ${}_1F_1(\nu, \beta, x)$ имеет место лишь при $0 < \mathrm{Re}\,\nu < \mathrm{Re}\,\beta$, тогда как почти для всех членов рядов (2.3)—(2.4) это условие не выполняется. Вместе с тем вывод, основанный на использовании функции распределения является вполне строгим и не содержит областей, в которых функции не определены.

Функция $1 - I_\alpha(q, \theta)$ при различных значениях параметров приведена на фиг. 1 и 2. Семейство кривых фиг. 1 построено для $m = 0.5$. Цифрами у кривых указаны значения параметра дробности $\alpha$. На фиг. 2 приведены те же кривые при $m = 0.05$. Как видно из сопоставления кривых, уменьшение параметра $m$ приводит к более слабой зависимости интегралов от приведенного времени.




Фиг. 1




Фиг. 2

Ввиду того, что подынтегральная функция имеет слабую особенность в окрестности точки $x = 0$, область интегрирования (0,1) разбивалась на интервалы $(10^{-n-1}, 10^{-n})$, а искомый интеграл представлялся в виде ряда

$$I = I_0 + I_1 + I_2 + \ldots$$

каждый член которого есть результат интегрирования на $n$-м интервале. Необходимое количество слагаемых ряда выбиралось из условия, чтобы разность $1 - I_\alpha(q, 0)$ обеспечивала требуемую точность. Для построения графика при точности не менее 1% оказывалось достаточным вычислять пять слагаемых ряда.

4. Аналогичный подход может быть проведен и для дробно-экспоненциальных ядер, введенных Ю. Н. Работновым [6]. Имеем

$$M(i\omega) = M_\infty - \frac{\Delta M}{1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha}, \qquad J(i\omega) = J_\infty + \frac{\Delta J}{1 + (i\omega\tau_\sigma)^\alpha} \tag{4.1}$$

$$H(\tau) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}[\alpha\ln(\tau/\tau_\varepsilon)] + \cos\alpha\pi}, \quad L(\tau) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}[\alpha\ln(\tau/\tau_\sigma)] + \cos\alpha\pi} \tag{4.2}$$

$$\varphi(t) = I_\alpha(\theta_\varepsilon), \qquad \psi(t) = 1 - I_\alpha(\theta_\sigma) \tag{4.3}$$

$$\mathrm{I}_\alpha(\theta) = 1 - \vartheta_\alpha * 1 = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty x^{\alpha-1}(1 + x^{2\alpha} + 2x^\alpha\cos\alpha\pi)^{-1}e^{-\theta x}\,dx$$

$$\theta_\varepsilon = \frac{t}{\tau_\varepsilon}, \quad \theta_\sigma = \frac{t}{\tau_\sigma}, \quad \left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)^\alpha = \frac{M_0}{M_\infty}, \quad \theta = \begin{cases}\theta_\varepsilon \\ \theta_\sigma\end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \tag{4.4}$$

В отличие от предыдущего случая функции распределения $H(\tau)$ и $L(\tau)$ в логарифмических координатах симметричны и лишь сдвинуты одна относительно другой.

Наряду с функциями распределения (4.2) иногда применяется функция распределения [7, 8]

$$H(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}[2\alpha\ln(\tau/\tau_0)]+\cos\alpha\pi} \tag{4.5}$$

вытекающая из эмпирического выражения для мнимой части модуля упругости [9]

$$\operatorname{Im} M=(M_\infty-M_0)\operatorname{sch}[\alpha\ln(\omega\tau_0)] \tag{4.6}$$

Функция (4.5) так же, как и (4.2), приводит [10] к симметричной диаграмме $M''=M''(M')$, однако для нее функция распределения времен запаздывания $L(\tau)$ уже не будет иметь такой же вид, как $H(\tau)$. Поэтому более удобными будут функции (4.2), соответствующие дробно-экспоненциальным ядрам.

Сопоставим релаксацию и ползучесть рассматриваемой среды согласно формулам (1.8) и (3.10) с соответствующим поведением материала при дробно-экспоненциальной функции памяти. Полагая $\alpha={}^1/_2$ в последнем случае, находим

$$\varphi=e^\theta\operatorname{erfc}\theta,\qquad \psi=1-e^\theta\operatorname{erfc}\theta \tag{4.7}$$

Отсюда асимптотика $\theta\to\infty$ имеет вид

$$\varphi\approx\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}},\qquad \psi\approx1-\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \tag{4.8}$$

Тогда как из формул (1.8) и (3.12) следует:

$$\varphi\approx\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}},\qquad \psi=1-\frac{2}{\sqrt{\pi\theta}} \tag{4.9}$$

Отметим, что асимптотические оценки для $\varphi$, а также для $\psi$ согласно (4.8) имеют место при любых $m$. В равенстве (4.9) при вычислении $\psi$ принималось $m=\alpha={}^1/_2$.

При использовании функции распределения (4.5), приняв $\alpha={}^1/_2$, для функции релаксации найдем

$$\varphi=\frac{2}{\pi}(\operatorname{ci}\theta\sin\theta-\operatorname{si}\theta\cos\theta) \tag{4.10}$$

Отсюда асимптотика при больших $\theta$

$$\varphi\approx\frac{2}{\pi\theta} \tag{4.11}$$

т. е. имеет место более быстрое убывание, чем в обоих предыдущих случаях.

Поступила 30 VII 1968

## ЛИТЕРАТУРА


1. Колтунов М. А. О выделении главной части наследственных функций влияния для описания релаксационных процессов в начальный период. Механика полимеров, 1967, № 4, стр. 625.
2. Шермергор Т. Д. Реологические характеристики упруговязких материалов, обладающих асимметричным релаксационным спектром. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
3. Davidson D. W., Cole R. H. Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylen, Glycol and n-Propanol. J. Chem. Phys., 1951, vol. 19, No. 12.
4. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1949.
5. Ферри Дж. Вязко-упругие свойства полимеров. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
6. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
7. Шермергор Т. Д. Расчет функций распределения констант релаксаций для упруго-вязких тел. Изв. вузов, Физика, 1960, № 3.
8. Шермергор Т. Д. Расчет функций распределения констант релаксаций по дисперсии действительной части комплексной упругости для упруго-вязких тел. Изв. вузов, Физика, 1961, № 1.
9. Браун В. Диэлектрики. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
10. Шермергор Т. Д. О симметрии релаксационного спектра. Тр. Новокузнецкого пед. ин-та, сер. физ.-матем., 1962, т. 4.